

Analysis II (SS 2015) — Scheinklausur 2

Termin: 25.07.2015

Hinweise: Abgaben mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.
Bei den **Aufgaben 5,6 und 8** sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung pro Aufgabe jeweils ein Extrablatt.

Bei den übrigen Aufgaben wird nur die Abgabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.

Bei Aufgabe 1 mit dem Hinweis **J** für "ja" und **N** für "nein" werden für richtige Antworten Pluspunkte, für falsche Antworten entsprechend viele Minuspunkte und für fehlende Antworten keine Punkte gegeben.

Bei Aufgabe 7 sind die Punkte direkt in der gegebenen Karte zu markieren und zu beschriften.

Am Ende der Klausur bitte alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.

Hilfsmittel: **Keine** außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.

Bearbeitungszeit: 100 min

Name:

Matrikel-Nr.:

Gruppen-Nr.:

Punkte:

A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Σ
<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Aufgabe 1 (3 Punkte) Sind folgende Aussagen wahr? (**J** für “ja”, **N** für “nein”).

Eine lineare Abbildung $L : V \rightarrow W$ zwischen zwei linearen Räumen V und W ist genau dann stetig auf V , wenn sie in einem einzigen Punkt $x_0 \in V$ stetig ist.	J
Ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ schwach differenzierbar, so ist f auch fréchetdifferenzierbar.	N
Ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ fréchetdifferenzierbar, so existieren alle partiellen Ableitungen.	J
Existieren für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ alle partiellen Ableitungen in einer Umgebung eines Punktes und sind in diesem Punkt stetig, dann ist f in diesem Punkt auch fréchetdifferenzierbar.	J
Ist eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $\nabla f(x_0) = 0$, so liegt in x_0 unbedingt ein Extremum vor.	N
Die Gleichung $x^2 + y^2 = 2$ ist in allen $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lokal nach x auflösbar.	N

Korrekturanmerkung:

- Jede richtige Antwort gibt +0,5 Punkte.
- Jede falsche Antwort gibt -0,5 Punkte.
- Fehlende Antworten geben 0 Punkte.

Aufgabe 2 (6 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) := \sin(2x + y) + \cos(z).$$

(a) Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix von f .

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 \cos(2x + y) \\ \cos(2x + y) \\ -\sin(z) \end{pmatrix}$$

1,5

$$H_f = \begin{pmatrix} -4 \sin(2x + y) & -2 \sin(2x + y) & 0 \\ -2 \sin(2x + y) & -\sin(2x + y) & 0 \\ 0 & 0 & -\cos(z) \end{pmatrix}$$

2,5

(b) Geben Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung von f im Punkt $(0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ an.

$$T_2(f; (x, y, z), (0, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})) =$$

$$1 - (z - \frac{\pi}{2}) - 2x^2 - 2x(y - \frac{\pi}{2}) - \frac{1}{2}(y - \frac{\pi}{2})^2$$

2

Korrekturanmerkung:

- Jeder richtige Eintrag im Gradienten ergibt 0,5 Punkte.
- Jeder richtige, von Null verschiedene Eintrag im oberen Dreieck der Hessematrix ergibt 0,5 Punkte, die beiden Nullen ergeben zusammen 0,5 Punkte.

Aufgabe 3 (6 Punkte) Es sollen die Art und Lage aller Extrema der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto (3 - x^2 - y^2) \cdot e^{-y}$$

bestimmt werden. Tragen Sie ihre (Zwischen-) Ergebnisse in folgende Kästchen ein.
(Hinweis: Die Funktion besitzt genau zwei kritische Punkte.)

1. kritischer Punkt: $(x, y) =$ und Funktionswert $f(x, y) =$ 0,5+0,5

Hessematrix in diesem Punkt $H_f(x, y) =$ 1

Definitheit der Hessematrix:
(positiv/negativ definit oder indefinit) 0,5

Art des Extremums oder Sattelpunkt: 0,5

2. kritischer Punkt: $(x, y) =$ und Funktionswert $f(x, y) =$ 0,5+0,5

Hessematrix in diesem Punkt $H_f(x, y) =$ 1

Definitheit der Hessematrix:
(positiv/negativ definit oder indefinit) 0,5

Art des Extremums oder Sattelpunkt: 0,5

Aufgabe 4 (2 Punkte) Gegeben sind $f \in C^1(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3)$.

(a) Geben Sie die Definition des Raumes $C^1(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R})$ an:

$$C^1(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}) = \left\{ f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \text{ existieren} \right) \wedge \left(f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \text{ stetig in } \mathbb{R}^3 \right) \right\}$$

1

(b) Geben Sie die Ableitung von $f \circ g$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen von f und g an:

$$(f \circ g)'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{(g_1(x), g_2(x), g_3(x))} \cdot g_1'(x) + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{(g_1(x), g_2(x), g_3(x))} \cdot g_2'(x) + \frac{\partial f}{\partial x_3} \Big|_{(g_1(x), g_2(x), g_3(x))} \cdot g_3'(x)$$

1

Aufgabe 5 (6 Punkte)

- (a) Seien E, F zwei normierte Räume und $f : E \rightarrow F$ eine Funktion. Geben Sie die Definition der Fréchetableitung von f in einem Punkt $x_0 \in E$ an.
- (b) Berechnen Sie die Fréchetableitung der folgenden Funktionen in allen Punkten ihres Definitionsbereichs:
- (i) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$x \mapsto A(x + b)$$

für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^n$.

- (ii) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix}.$$

Lösung 5.

- (a) Eine Funktion $f : E \rightarrow F$ zwischen zwei normierten Räumen $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(F, \|\cdot\|_F)$ ist in einem Punkt $x_0 \in E$ genau dann fréchetdifferenzierbar, wenn es eine stetige, lineare Abbildung $f'(x_0) : E \rightarrow F$ gibt, sodass die Identität

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)(h) + o(\|h\|_E)$$

für $h \rightarrow 0, h \in E$ erfüllt ist.

- (b) (i) Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig. Wir berechnen die Fréchetableitung nach der Definition aus Teilaufgabe (a). Für $h \in \mathbb{R}^n$ erhalten wir

$$f(x_0 + h) = A(x_0 + h + b) = A(x_0 + b) + Ah = f(x_0) + Ah + 0.$$

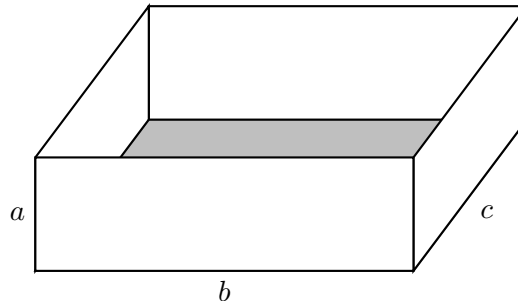
Da die Abbildung $h \mapsto Ah$ stetig und linear ist, folgt, dass f in allen $x_0 \in E$ fréchetdifferenzierbar ist und $f'(x_0) = A$ gilt.

- (ii) Wir betrachten die Jacobimatrix von f , welche als Einträge gerade die partiellen Ableitungen von f beinhaltet. Es ist

$$J_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ 0 & z & y \\ z & 0 & x \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass diese in allen Punkten aus \mathbb{R}^3 existieren und sogar auf ganz \mathbb{R}^3 stetig sind. Damit folgt, dass f in allen $x_0 \in \mathbb{R}^3$ fréchetdifferenzierbar ist (Satz 10.26 aus der Vorlesung).

Aufgabe 6 (4 Punkte) Wir betrachten eine offene Schachtel (ohne Deckel) mit den Kantenlängen $a, b, c > 0$. Die Gesamtoberfläche dieser Schachtel (ohne Deckel) soll gerade eine Flächeneinheit betragen. Wie müssen a, b, c gewählt werden, damit das Volumen der Schachtel maximal wird (die Existenz der Lösung soll dabei stillschweigend vorausgesetzt werden).



Lösung 6.

Das Volumen der Schachtel ist gegeben durch $V = abc$, die Oberfläche durch $O = bc + 2ab + 2ac$ setzen wir $O = 1$, so erhalten wir die Lagrangefunktion

$$f(a, b, c, \lambda) = abc + \lambda(bc + 2ab + 2ac - 1). \quad (1)$$

Bilden wir von dieser den Gradienten, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$bc + 2ab + 2ac = 1 \quad (1)$$

$$bc + \lambda(2b + 2c) = 0 \quad (2)$$

$$ac + \lambda(c + 2a) = 0 \quad (3)$$

$$ab + \lambda(b + 2a) = 0. \quad (4) \quad (1)$$

Eliminieren wir λ aus (2) und (3) (d.h. berechne $(2) \cdot (c + 2a) - (3) \cdot (2b + 2c)$), so erhalten wir, dass

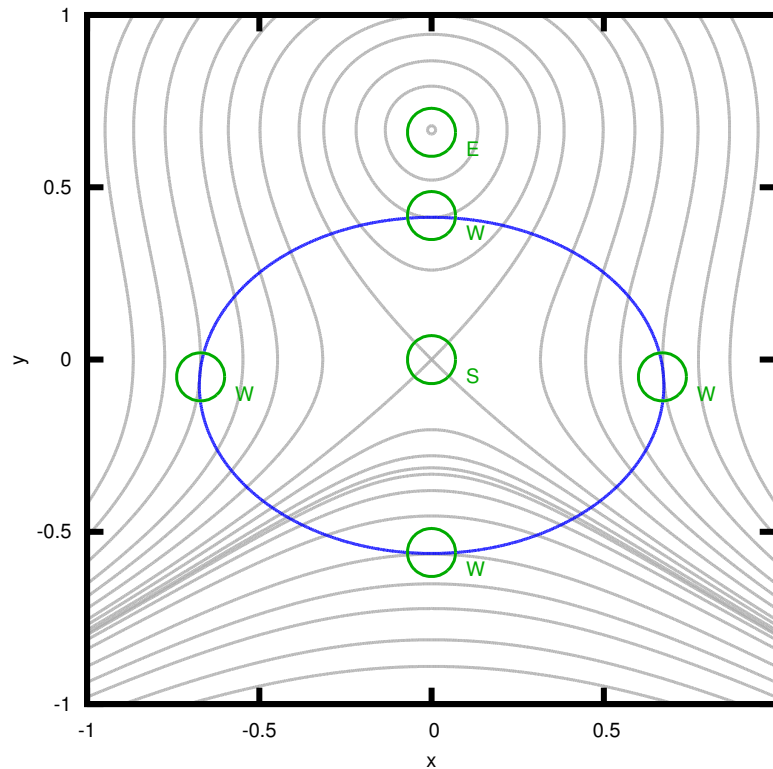
$$bc(c + 2a) - ac(2b + 2c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c^2(b - 2a) = 0 \quad \stackrel{c > 0}{\Leftrightarrow} \quad b = 2a. \quad (1)$$

Genauso erhalten wir aus (2) und (4), dass $c = 2a$ und damit insbesondere, dass $b = c$. Setzen wir dies in (1) ein, so folgt

$$4a^2 + 4a^2 + 4a^2 = 12a^2 \stackrel{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\sqrt{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

Daraus folgt wiederum, dass $b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$. (1)

Aufgabe 7 (3 Punkte) Folgende Graphik zeigt das Höhenprofil (grau) einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.



- (a) Die Funktion besitzt im gezeichneten Gebiet $[-1, 1] \times [-1, 1]$ einen Extrem- und einen Sattelpunkt. Markieren Sie diese in der Graphik und beschriften Sie das Extremum mit **E** und den Sattelpunkt mit **S**.
- (b) In der Graphik ist zusätzlich ein Weg (blau) eingezeichnet. Markieren Sie die Extrema entlang dieses Weges und beschriften Sie diese mit **W**.

Korrekturanmerkung:

- Die Punkte sind in obiger Graphik grün eingezeichnet und beschriftet.
- Insgesamt sind sechs Punkte zu markieren und zu beschriften. Jeder korrekt eingetragene und beschriftete Punkt ergibt 0,5 Punkte.

Aufgabe 8 (4 Punkte) Zeigen Sie, dass das System von Gleichungen

$$\begin{aligned}x_1^2 &= y_1 \\x_2 &= y_2^3 - y_2\end{aligned}$$

mit $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ in $(0, 0, 0, 0)$ lokal nach $y = (y_1, y_2)$ auflösbar ist und berechnen Sie die Ableitung der auflösenden Funktion in diesem Punkt.

(*Hinweis:* Bringen Sie das Gleichungssystem in die Form $F(x, y) = 0$ mit $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ und $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.)

Lösung 8.

Wir bringen alle Variablen des Gleichungssystems auf die linke Seite und erhalten

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x_1^2 - y_1 \\ x_2 - y_2^3 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (0.5)$$

Da beide Einträge von F aus Polynomen bestehen, ist $F \in C^1(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^2)$. Desweiteren überprüfen wir die Bedingung $F((0, 0), (0, 0)) = 0$, diese ist offensichtlich erfüllt. Zuletzt bilden wir

$$\partial_y F = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3y_2^2 + 1 \end{pmatrix} \stackrel{y_2=0}{=} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

diese Matrix ist invertierbar. Damit existiert (lokal in einer Umgebung von $(0, 0)$) eine stetig differenzierbare auflösende Funktion φ mit $F(x, \varphi(x)) = 0$ für alle x aus einer Umgebung von $(0, 0)$. Die Ableitung von φ ist gegeben durch

$$\varphi'(x) = -(\partial_y F)^{-1}(x, \varphi(x)) \partial_x F(x, \varphi(x)). \quad (0.5)$$

Mit

$$\partial_x F = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

folgt, dass

$$\varphi'(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$