Nachscheinklausur — Analysis II (SS 2015)

Termin:	*25.09.2015*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen.* *Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist. Alle verwendeten Aussagen und Sätze sind dabei zu kennzeichnen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*120 min*

Name:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	Σ

Aufgabe 1. (4 Punkte)

(a) Geben Sie die Definitionen einer Treppen- und Regelfunktion an.

(b) Ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

eine Regelfunktion auf dem Intervall $[-1, 1]$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2. (8 Punkte)

(a) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, ohne Verwendung von partieller Integration, dass

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

(b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(k) := \int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx$$

für alle $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{k\to\infty} F(k) = 0$$

gilt.

Aufgabe 3. (8 Punkte)

(a) Seien V, W zwei normierte Vektorräume und $f : V \to W$ eine Abbildung. Geben Sie die Definition der Fréchetdifferenzierbarkeit von f in einem Punkt $x_0 \in V$ an.

(b) Gegeben sei die Funktion

$$\Phi : C([0, 1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto (f(0))^2.$$

Der Raum $C([0, 1], \mathbb{R})$ sei dabei mit der Supremumsnorm $||\cdot||_\infty$ versehen.
Zeigen Sie, dass Φ auf $C([0, 1], \mathbb{R})$ fréchetdifferenzierbar ist und geben Sie die Ableitung von Φ in einem beliebigen Punkt $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ an.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Gegeben seien eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und ein Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ mit $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Gesucht ist eine lokale Auflösung der Gleichung $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0, z_0).

(a) Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen an f existiert eine lokale Auflösung $\varphi \in C^1(B_\delta(x_0, y_0), \mathbb{R})$ für ein geeignetes $\delta > 0$?
(*Hinweis:* Die Angabe der Voraussetzungen genügt, ein Beweis ist hier nicht gefordert.)

(b) Angenommen die Voraussetzungen aus Teilaufgabe **(a)** sind erfüllt. Geben Sie die Ableitung φ' von φ mit Hilfe der partiellen Ableitungen von f an. Begründen Sie Ihr Ergebnis mit einer kurzen Rechnung.

Aufgabe 5. (8 Punkte)
Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für die $f(x, \cdot) \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Regelfunktion ist. Desweiteren seien u und v zwei weitere Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und wir definieren eine Abbildung $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$J(x) := \int_{u(x)}^{o(x)} f(x, t)\, dt.$$

(a) Unter welchen Voraussetzungen an u, o und f ist J auf $\mathbb{R}$ differenzierbar?

(b) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Ableitung von J aus den Ableitungen von u, o und f an.

(c) Beweisen Sie die Formel aus Teilaufgabe **(b)**.