Nachscheinklausur — Analysis II (SS 2015)

Termin:	*25.09.2015*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen.* *Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist. Alle verwendeten Aussagen und Sätze sind dabei zu kennzeichnen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*120 min*

Name:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	Σ

Aufgabe 1. (4 Punkte)

(a) Geben Sie die Definitionen einer Treppen- und Regelfunktion an.

(b) Ist die Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

eine Regelfunktion auf dem Intervall $[-1, 1]$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 1.

(a) Wir geben die Definitionen wie in der Vorlesung:

- Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine *Treppenfunktion*, wenn es eine Zerlegung

  $$Z = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n \,:\, a = \xi_0 < \xi_1 < \dots < \xi_n = b\}$$

  von $[a, b]$ gibt, sodass $f\big|_{]\xi_{k-1},\xi_k[}$ für alle $k = 1, \dots, n$ konstant ist. 1

- Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine *Regelfunktion*, wenn es eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen gibt, welche gleichmäßig bzgl. $x \in [a, b]$ für $n \to \infty$ gegen f konvergiert. 1

(b) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass f genau dann eine Regelfunktion ist, wenn an jedem Punkt $x_0 \in [-1, 1]$ der rechts- und linksseitige Grenzwert von f existieren. 1 Dies ist für die gegebene Funktion jedoch nicht der Fall. Um dies zu sehen wählen wir ein beliebiges $x_0 \in [-1, 1]$, $x_0 \neq 0$. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nun eine Folge irrationaler Zahlen, welche gegen x_0 konvergiert, so ist $f(x_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$. Nähern wir uns hingegen in den rationalen Zahlen x_0, d.h. wählen wir eine Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rationaler Zahlen, welche gegen x_0 konvergiert, so ist (wegen Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto x^2$) $\lim_{n\to\infty} f(y_n) > 0$. Dies trifft insbesondere 1 auch auf die rechts- und linksseitigen Grenzwerte zu.

Aufgabe 2. (8 Punkte)

(a) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, ohne Verwendung von partieller Integration, dass

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

(b) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion und $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$F(k) := \int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx$$

für alle $k \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{k\to\infty} F(k) = 0$$

gilt.

Lösung 2.

(a) Es gilt die aus der Analysis I bekannte Regel

$$(f \cdot g)' = f'g + fg' \qquad 1$$

bzw.

$$f'g = (f \cdot g)' - fg'$$

für die Ableitung eines Produkts zweier differenziebrarer Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Da $f \cdot g$ eine Stammfunktion von $(f \cdot g)'$ ist, erhalten wir

$$\int_a^b (f \cdot g)'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

(Folgerung aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung) und aus der Linearität des Integrals 1

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx. \qquad 1$$

(b) Mit Hilfe partieller Integration (vgl. Teilaufgabe **(a)**) erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} F(k) &= \int_a^b f(x)\sin(kx)\,dx \\ &= \frac{1}{k}\left(f(a)\cos(ka) - f(b)\cos(kb) + \int_a^b f'(x)\cos(kx)\,dx\right). \end{aligned} \qquad 1$$

Da sowohl f, als auch f' stetig auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ sind, gilt

$$|f(x)|, |f'(x)| \le C \qquad 1$$

für alle $x \in [a,b]$ und ein $C \in \mathbb{R}$. Wegen $|\cos(kx)| \leq 1$ für alle $x \in [a,b]$, folgt auch

$$\left| \int_a^b f'(x)\cos(kx) \right| \leq \int_a^b |f'(x)| \cdot |\cos(kx)|\, dx \leq (b-a)C \cdot 1$$

und wir erhalten zusammenfassend, dass

$$0 \leq |F(k)| \leq \frac{1}{k}(2+b-a)C \to 0 \qquad \text{für } k \to \infty.$$ 2

Damit folgt auch, dass $\lim_{k\to\infty} F(k) = 0$. 1

Aufgabe 3. (8 Punkte)

(a) Seien V, W zwei normierte Vektorräume und $f : V \to W$ eine Abbildung. Geben Sie die Definition der Fréchetdifferenzierbarkeit von f in einem Punkt $x_0 \in V$ an.

(b) Gegeben sei die Funktion

$$\Phi : C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto (f(0))^2.$$

Der Raum $C([0,1], \mathbb{R})$ sei dabei mit der Supremumsnorm $||\cdot||_\infty$ versehen.
Zeigen Sie, dass Φ auf $C([0,1], \mathbb{R})$ fréchetdifferenzierbar ist und geben Sie die Ableitung von Φ in einem beliebigen Punkt $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ an.

Lösung 3.

(a) Wir geben die Definition der Fréchetdifferenzierbarkeit wie in der Vorlesung:
Die Funktion f ist in $x_0 \in V$ genau dann fréchetdifferenzierbar, wenn es eine stetige (oder beschränkte) lineare Abbildung $f'(x_0) : V \to W$ gibt, sodass 1

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)(h) + o(||h||)$$ 1

für $h \to 0$ gilt.
(Alternativ kann man die Definition auch mit $x = x_0 + h$ bzw. $h = x - x_0$ formulieren.)

(b) Für $f, h \in C([0,1], \mathbb{R})$ ist

$$\Phi(f+h) = ((f+h)(0))^2 = (f(0) + h(0))^2 = (f(0))^2 + 2f(0)\cdot h(0) + (h(0))^2.$$ 1

Es bleiben nun zwei Dinge zu zeigen:

(i) Die Abbildung

$$L_f : C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad h \mapsto 2f(0)\cdot h(0)$$

ist linear und stetig (bzw. beschränkt).
Die Linearität von L_f lässt sich einfach nachrechnen, für $h, \tilde{h} \in C([0,1], \mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$L_f(\lambda h + \tilde{h}) = 2f(0)\cdot(\lambda h + \tilde{h})(0) = \lambda(2f(0)\cdot h(0)) + 2f(0)\cdot \tilde{h}(0) = \lambda L_f(h) + L_f(\tilde{h}).$$ 1

Für die Beschränktheit von L_f bemerken wir, dass

$$|L_f(h)| = |2f(0)\cdot h(0)| = 2|f(0)|\cdot|h(0)| \leq 2||f||_\infty \cdot ||h||_\infty,$$ 1

d.h. L_f ist auch stetig. 1

(ii) Der Ausdruck $(h(0))^2$ gehört zur Klasse $o(||h||_\infty)$, d.h. es ist

$$\frac{(h(0))^2}{||h||_\infty} \to 0$$

für $||h||_\infty \to 0$. Dies folgt aber aus der einfachen Abschätzung

$$0 \leq \frac{(h(0))^2}{||h||_\infty} \leq \frac{||h||_\infty^2}{||h||_\infty} = ||h||_\infty \to 0.$$ 1

Zusammenfassend haben wir gezeigt, dass Φ fréchetdifferenzierbar ist und die Ableitung von Φ durch die Abbildung

$$\Phi'(f) : C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad h \mapsto 2f(0)\cdot h(0)$$ 1

gegeben ist.

Aufgabe 4. (4 Punkte)
Gegeben seien eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und ein Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ mit $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Gesucht ist eine lokale Auflösung der Gleichung $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ in einer Umgebung von (x_0, y_0, z_0).

(a) Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen an f existiert eine lokale Auflösung $\varphi \in C^1(B_\delta(x_0, y_0), \mathbb{R})$ für ein geeignetes $\delta > 0$?
(*Hinweis:* Die Angabe der Voraussetzungen genügt, ein Beweis ist hier nicht gefordert.)

(b) Angenommen die Voraussetzungen aus Teilaufgabe **(a)** sind erfüllt. Geben Sie die Ableitung φ' von φ mit Hilfe der partiellen Ableitungen von f an. Begründen Sie Ihr Ergebnis mit einer kurzen Rechnung.

Lösung 4.

(a) Die beiden Eigenschaften $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ sind bereits gegeben. Wir müssen also nur noch fordern, dass

$$\left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)} \tag{1}$$

invertierbar, bzw. da es sich bei diesem Ausdruck um eine reelle Zahl handelt, dass diese nicht Null ist. D.h. die zusätzliche Voraussetzung lautet, dass

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

1

(b) Wir leiten die Gleichung $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$ auf beiden Seiten mit Hilfe der Kettenregel nach x partiell ab und erhalten

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \varphi(x, y)) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x,y,\varphi(x,y))} + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x,y,\varphi(x,y))} \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)}$$

1

(der Summand mit der Ableitung nach der zweiten Koordinate fällt dabei wegen $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ weg). Mit $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ erhalten wir daraus, dass

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_{(x,y)} = -\left.\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}}\right|_{(x,y,\varphi(x,y))}.$$

1

Leitet man die Gleichung $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ partiell nach y ab, erhält man ein analoges Ergebnis. Zusammenfassend wird die Ableitung von φ in einer Umgebung von (x_0, y_0) durch die Matrix

$$\varphi'(x, y) = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$$

1

dargestellt.

Aufgabe 5. (8 Punkte)
Wir betrachten eine Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für die $f(x, \cdot) \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Regelfunktion ist. Desweiteren seien u und v zwei weitere Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, und wir definieren eine Abbildung $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$J(x) := \int_{u(x)}^{o(x)} f(x,t)\,dt.$$

(a) Unter welchen Voraussetzungen an u, o und f ist J auf $\mathbb{R}$ differenzierbar?

(b) Geben Sie eine Formel zur Berechnung der Ableitung von J aus den Ableitungen von u, o und f an.

(c) Beweisen Sie die Formel aus Teilaufgabe **(b)**.

Lösung 5.

(a) Um J abzuleiten betrachtet man zunächst eine Hilfsfunktion

$$(a, b, x) \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dx$$

und berechnet von dieser die partiellen Ableitungen nach jeder der Koordinaten. Die Ableitung von J erhält man dann mit Hilfe der Kettenregel. Beim partiellen Differenzieren nach x müssen wir dabei die Reihenfolge von Integral und Ableitung vertauschen, d.h.

- f muss nach x partiell differenzierbar sein und 0,5
- $\frac{\partial}{\partial x} f(x, \cdot)$ muss eine stetige Funktion sein. 0,5

Wenn wir die Kettenregel verwenden treten die Ableitungen von u und o auf, d.h.

- u und o müssen differenzierbar sein. 1

(b) Die Ableitung von J ist gegeben durch

$$J'(x) = f(x, o(x)) \cdot o'(x) - f(x, u(x)) \cdot u'(x) + \int_{u(x)}^{o(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt.$$ 1

(c) Wir betrachten die Hilfsfunktion

$$\varphi : (a, b, x) \mapsto \int_a^b f(x,t)\,dt.$$ 1

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergeben sich für die partiellen Ableitungen nach den ersten beiden Koordinaten die Ausdrücke

$$\frac{\partial \varphi}{\partial b} = f(x, b), \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial a} = -f(x, a).$$ 1+1

Unter den Voraussetzungen aus Teilaufgabe **(a)** folgt

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x,t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt.$$ 1

Damit erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel, dass

$$J'(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -f(x, u(x)) \cdot u'(x) + f(x, o(x)) \cdot o'(x) + \int_{u(x)}^{o(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt.$$ 1

was die Formel aus Teilaufgabe **(b)** beweist.