Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math.techn. Christian Winkel
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 2014/15) — Scheinklausur 4

Termin:	*22.05.2015*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen. Verwendete Sätze sind zu benennen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*90 min*

Name:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	Σ

Aufgabe 1 (7 Punkte)

(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei Folgen reeller Zahlen, sodass

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n.$$

Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen den gleichen Grenzwert c. Beweisen Sie, dass dann auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert.
(*Bemerkung:* Außer der angegebenen Ungleichung darf nur die Definition der Konvergenz verwendet werden.)

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \geq b \geq 0$, so zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a.$$

(*Hinweis:* Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für alle $c > 0$ darf ohne Beweis verwendet werden.)

(c) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n) x^n$$

in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz.

Aufgabe 2 (5 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$ sei eine Folge von Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \mathrm{e}^{-(x-n)^2}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Art und Lage aller Extrema von f_n in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

(b) Geben Sie den punktweisen Grenzwert der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

(c) Ist die Funktionenfolge gleichmäßig konvergent?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie die Definition der Differenzierbarkeit von f in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ an.

(b) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie an allen Stellen, an denen f differenzierbar ist, die Ableitung von f.

Aufgabe 4 (3 Punkte) Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit $\inf(M) > 0$. Zeigen Sie, dass dann die Menge

$$A := \left\{ \frac{1}{x} \, : \, x \in M \right\}$$

nach oben beschränkt ist und dass

$$\sup(A) = \frac{1}{\inf(M)}$$

gilt.