Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math.techn. Christian Winkel
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis I (WS 2014/15) — Scheinklausur 4

Termin:	*22.05.2015*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen. Verwendete Sätze sind zu benennen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*90 min*

Name:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	Σ

Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math.techn. Christian Winkel
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Aufgabe 1 (7 Punkte)

(a) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ drei Folgen reeller Zahlen, sodass

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq c_n \leq b_n.$$

Angenommen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren gegen den gleichen Grenzwert c. Beweisen Sie, dass dann auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert.
(*Bemerkung:* Außer der angegebenen Ungleichung darf nur die Definition der Konvergenz verwendet werden.)

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \geq b \geq 0$, so zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a.$$

(*Hinweis:* Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$ für alle $c > 0$ darf ohne Beweis verwendet werden.)

(c) Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n)x^n$$

in Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}$ auf Konvergenz.

Lösung 1.

(a) Wähle $\varepsilon > 0$ beliebig. Da beide Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergieren finden wir ein $N_\varepsilon^a \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n - c| < \varepsilon/3$ für alle $n \geq N_\varepsilon^a$ und ein N_ε^b, sodass $|b_n - c| < \varepsilon/3$ für alle $n \geq N_\varepsilon^b$. Wählen wir 1

$$N_\varepsilon := \max\{N_\varepsilon^a, N_\varepsilon^b\}$$ 1

so gelten beide Ungleichungen für alle $n \geq N_\varepsilon$. Damit erhalten wir schließlich mit Hilfe der Dreiecksungleichung, dass

$$|c_n - c| \leq |c_n - a_n| + |a_n - c| \leq |b_n - a_n| + |a_n - c| \leq |b_n - c| + |c - a_n| + |a_n - c| < \varepsilon.$$ 1

Im zweiten Schritt haben wir dabei die gegebene Ungleichung $a_n \leq c_n \leq b_n$ verwendet. Zusammengefasst bedeutet diese Rechnung, dass auch $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen c konvergiert.

(b) Wegen $a \geq b \geq 0$ ist

$$a = \sqrt[n]{a^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2 \cdot a^n} = a \cdot \sqrt[n]{2}.$$ 1

Nach dem in der Aufgabe gegebenen Hinweis ist $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$ und die gegeben Folge ist wie die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus Teilaufgabe **(a)** eingeschachtelt. Damit folgt 1

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = a$$

nach Teilaufgabe **(a)**.

(c) Im Fall $|x| \geq 1$ ist $(1+(-1)^n)x^n$ keine Nullfolge und die gegebene Reihe divergiert. Ist hingegen $|x| < 1$ so können wir z.B. das Wurzelkriterium nach Cauchy verwenden um die Konvergenz der Reihe zu zeigen, es ist 1

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + (-1)^n} \cdot |x| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} \cdot |x| = |x| < 1.$$ 1

Aufgabe 2 (5 Punkte) Für $n \in \mathbb{N}$ sei eine Folge von Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto \mathrm{e}^{-(x-n)^2}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Art und Lage aller Extrema von f_n in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$.

(b) Geben Sie den punktweisen Grenzwert der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

(c) Ist die Funktionenfolge gleichmäßig konvergent?

Lösung 2.

(a) Damit in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ ein lokales Extremum von f_n vorliegt, ist die Bedingung $f'(x) = 0$ notwendig. Wir bilden daher die erste Ableitung von f_n und suchen nach Nullstellen. Dabei erhalten wir

$$f_n'(x) = -2(x-n)\mathrm{e}^{-(x-n)^2}$$ 1

und es ist $f_n'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = n$. Da $f_n(x) > 0$ für alle $x < n$ und $f_n(x) < 0$ für 1
alle $x > n$ hat f_n in $x = n$ einen Vorzeichenwechsel “$+ \to -$” und f_n hat bei $x = n$ ein lokales
Maximum. Für die Lage dieses Maximums berechnen wir $f_n(n) = \mathrm{e}^{-(n-n)^2} = \mathrm{e}^0 = 1$. 1

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Wir behaupten, dass

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0.$$ 1

Hierfür weisen wir direkt nach, dass es für ein gegebnenes $\varepsilon > 0$ ein $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$\left|\mathrm{e}^{-(x-n)^2}\right| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N_\varepsilon$ gilt. Logarithmieren und elementares Umfomen beider Seiten liefert

$$\left|\mathrm{e}^{-(x-n)^2}\right| < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad (x-n)^2 > \ln(\varepsilon^{-1}) \qquad \Leftrightarrow \qquad n > x + \sqrt{\ln(\varepsilon^{-1})}$$

falls $0 < \varepsilon < 1$.
Alternativ bemerken wir, dass für jedes fest gewählte $x \in \mathbb{R}$ der Ausdruck $(x-n)^2$ bestimmt gegen $+\infty$ divergiert. Damit konvergiert aber $\mathrm{e}^{-(x-n)^2}$ gegen 0. Zusammengefasst ist der punktweise Grenzwert der Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die konstante Funktion $x \mapsto 0$.

(c) Wegen $f_n(n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ kann eine Ungleichung der Form

$$|f_n(x)| < \varepsilon$$ 1

falls $\varepsilon < 1$ nicht gleichmäßig für alle $x \in \mathbb{R}$ gelten. Die Funktionenfolge konvergiert damit nicht gleichmäßig bzgl. $x \in \mathbb{R}$.

Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math.techn. Christian Winkel
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Geben Sie die Definition der Differenzierbarkeit von f in einem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ an.

(b) Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2)}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

auf Differenzierbarkeit und berechnen Sie an allen Stellen, an denen f differenzierbar ist, die Ableitung von f.

Lösung 3.

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist genau dann im Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$ 1

existiert. Alternativ kann man auch den Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ 1

verwenden.

(b) Wir betrachten zunächst den Fall $x \neq 0$. Die Funktion $x \mapsto \sin(x^2)$ ist als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Wegen $x \neq 0$ ist dann $x \mapsto f(x)$ als Quotient differenzierbarer Funktionen differenzierbar. Die Ableitung für $x \neq 0$ lässt sich mit Hilfe der Quotientenregel berechnen, man erhält 0,5

$$f'(x) = \frac{2x^2 \cos(x^2) - \sin(x^2)}{x^2}.$$ 1

Für $x = 0$ müssen wir den Differenzenquotienten betrachten. Es ist

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sin(h^2)}{h^2}.$$ 0,5

Dies ist eine Unbestimmtheit vom Typ "0/0" für die Berechnung des Grenzwertes für $h \to 0$ können wir also die Regel von Bernoulli-de l'Hôpital verwenden. Damit erhalten wir, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h^2)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{2h \cos(h^2)}{2h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\cos(h^2) - 4h^2 \sin(h^2)}{2} = 1.$$ 1

D.h. f ist in $x = 0$ differenzierbar mit $f'(0) = 1$.
Zusammengefasst haben wir gezeigt, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, für die Ableitung erhalten wir

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 \cos(x^2) - \sin(x^2)}{x^2} & \text{für } x \neq 0, \\ 1 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte) Sei $M \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$ mit $\inf(M) > 0$. Zeigen Sie, dass dann die Menge

$$A := \left\{ \frac{1}{x} \, : \, x \in M \right\}$$

nach oben beschränkt ist und dass

$$\sup(A) = \frac{1}{\inf(M)}$$

gilt.

Lösung 4.
Nach Definition des Infimums von M gilt für alle $x \in M$, dass

$$0 < \inf(M) \leq x.$$

Damit ist aber auch

$$\frac{1}{\inf(M)} \geq \frac{1}{x} \in A \qquad \textbf{1}$$

für alle $x \in M$. D.h. $1/\inf(M)$ ist eine obere Schranke an A und A ist nach oben beschränkt. Für die zweite Aussage bemerken wir, dass nach Definition des Supremums

$$\sup(A) \leq \frac{1}{\inf(M)} \qquad \textbf{1}$$

gilt. Angenommen es ist $\sup(A) < 1/\inf(M)$ bzw. $\inf(M) < 1/\sup(A)$, so finden wir ein $x \in M$ mit

$$\inf(M) < x < \frac{1}{\sup(A)}. \qquad \textbf{1}$$

(man wähle z.B. ein Element einer gegen $\inf(M)$ konvergenten Folge aus M). Damit ist aber $1/x \in A$ mit $1/x > \sup(A)$ im Widerspruch zur Definition von $\sup(A)$ als obere Schranke an A.