Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Kourosh Sanei Kashani
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis II (SS 2015) — Blatt 1

Math is like love - a simple idea but it can get complicated.
(R. Drabek)

Sei $I = [a, b]$ mit $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall. Eine *Zerlegung* von I ist eine Menge von Punkten $x_0, x_1, \dots, x_n$, so dass

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Die Intervalle $[x_{i-1}, x_i] \subset I$, $i = 1, \dots, n$ bezeichnen wir als die *Intervalle der Zerlegung* von I, die längste Intervallbreite, die dabei auftritt ist die *Feinheit der Zerlegung*, in Zeichen $\lambda(I)$. Eine Menge ξ von Punkten ξ_i mit $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ für alle $i = 1, \dots, n$ bezeichnen wir als *Stützstellen der Zerlegung*, die Zerlegung selbst zusammen mit einer Stützstellenmenge ξ bezeichnen wir mit dem Symbol (I, ξ).

Sei f eine auf dem Intervall $I = [a, b]$ definierte Funktion und (I, ξ) eine Zerlegung von I mit Stützstellen ξ, so definieren wir die *Riemannsumme* von f zu (I, ξ) durch

$$\sigma(f; I, \xi) := \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Hierbei bezeichnet $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ die Breite des Intervalls $[x_{i-1}, x_i]$.

Eine auf einem Intervall $I = [a, b]$ definierte Funktion f heißt *Riemann-integrierbar*, falls

$$\exists_{S \in \mathbb{R}} \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta_\varepsilon > 0} \forall_{(I,\xi)\,:\,\lambda(I) < \delta_\varepsilon} \ |S - \sigma(f; I, \xi)| < \varepsilon.$$

Die Zahl S ist dabei der *Wert des Riemannintegrals.*

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

1.1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Zeigen Sie, dass f dann Riemann-integrierbar ist und die Werte von Riemannintegral und Regelintegral übereinstimmen.
(*Hinweis:* Zeigen Sie diese Eigenschaft zunächst für Treppenfunktionen. Die allgemeine Aussage folgt dann durch Approximation der Regelfunktion durch eine Folge von Treppenfunktionen.)

1.2. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine abschnittsweise monotone Funktion, d.h. es gibt eine Zerlegung $x_0, \dots, x_n$ von $[a, b]$, sodass $f|_{[x_{i-1}, x_i]}$ für alle $i = 1, \dots, n$ monoton ist. Zeigen Sie, dass f dann eine Regelfunktion ist.

Votieraufgaben

1.3. **(a)** Sei $f : [0, 1] \to [0, 1]$, $x \mapsto x^2$. Approximieren Sie f durch eine Folge von Treppenfunktionen und berechnen Sie $\int_0^1 f(x)\, dx$.

(b) Sei $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{falls } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \text{ mit } \operatorname{ggT}(m, n) = 1, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f eine Regelfunktion ist und berechnen Sie ihr Integral auf allen Intervallen $[a, b] \subset]0, \infty[$.

1.4. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine stetige Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine *Stammfunktion* von f, falls F für fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) $x \in [a, b]$ differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für fast alle $x \in [a, b]$ gilt.

(a) Seien F_1 und F_2 zwei Stammfunktionen einer Funktion f auf dem selben Intervall[1]. Zeigen Sie, dass dann $F_1 - F_2$ konstant auf diesem Intervall ist.

(b) Seien $F_1(x) = \operatorname{arccot}(1/x)$ und $F_2(x) = \arctan x$ (den Tangens invertieren wir dabei auf dem Intervall $]-\pi/2, \pi/2[$, den Kotangens auf $]0, \pi[$). Verifizieren Sie folgende Aussagen: Es ist

$$F_1'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{bzw.} \qquad F_2'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

im Inneren der Definitionsbereiche von F_1 bzw. F_2, jedoch

$$F_1(x) - F_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x > 0, \\ \pi, & \text{für } x < 0. \end{cases}$$

Steht dieses Beispiel im Widerspruch zur Aussage aus Teilaufgabe **(a)**?

Zusatzaufgaben

1.5. Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\pi \ln\left(1 - 2\alpha \cos x + \alpha^2\right) dx$$

in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$. (*Hinweis:* Riemannsumme.)

[1] gemeint ist, dass beide Funktionen auf dem gesammten Intervall differenzierbar sind.