Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Kourosh Sanei Kashani
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis II (SS 2015) — Blatt 3

I cannot do't without counters[1].
The Winter's Tale Act 4 Scene 3, William Shakespeare (1564 - 1616)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

3.1. Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale auf geeigneten Integrationsbereichen:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-3}{x-1}\,dx$, **(b)** $\displaystyle\int \frac{4x+2}{(x^2-1)(x+2)}\,dx$,

(c) $\displaystyle\int \frac{x^5+2x^4+x^3+3x^2-2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)^2}\,dx$.

3.2. Sei $R(u,v)$ eine rationale Funktion in u und v, d.h. ein Quotient zweier Polynome in u und v. Um ein Integral der Form $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ zu berechnen gibt es mehrere Methoden. Eine recht effektive Methode für Integrale der Form $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,dx$ ist die Substitution $t = \tan x$. Stellen Sie $\sin^2 x$ und $\cos^2 x$ mit Hilfe von $\tan x$ dar und zeigen Sie, dass

$$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x)\,dx = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}\,dt$$

was das Problem auf die Integration einer rationalen Funktion zurückführt. Bei Integralen der Form $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ ist $t = \tan(x/2)$ eine praktische Substitution. Zeigen Sie genauso, dass

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Berechnen Sie folgende Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{dx}{2-\sin x}$, **(b)** $\displaystyle\int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,dx$, **(c)** $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\,dx$.

Votieraufgaben

3.3. Berechnen Sie

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$$

rekursiv für alle $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.

[1] Rechenmaschine

3.4. Interpretieren Sie folgende Grenzwerte als Grenzwerte geeigneter Riemann Summen und berechnen Sie damit

$$\textbf{(a)}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n}\sqrt{k(n-k)},\qquad \textbf{(b)}\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2},\qquad \textbf{(c)}\quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\sin\left(\frac{\pi}{k}\right).$$

(*Hinweis für Teilaufgabe* ***(c)****:* Schätzen Sie $\sin(\pi/k)$ nach oben und unten ab.)

Zusatzaufgaben

3.5. Im Hinweis aus Aufgabe **15.2** des Wintersemesters wurde behauptet, dass

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = 1$$

für die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1/n^s$ mit $s > 1$ gilt. Dies soll nun gezeigt werden. Beweisen Sie dazu einfach, dass

$$\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq \frac{s}{s-1}$$

für alle $s > 1$ erfüllt ist.