Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Kourosh Sanei Kashani
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis II (SS 2015) — Blatt 4

Nature laughs at the difficulties of integration.
(Pierre-Simon de Laplace, 1749 - 1827)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

4.1. Überprüfen Sie folgende uneigentliche Integrale (in Abhängigkeit von $\gamma \in \mathbb{R}$) auf Konvergenz:

(a) $\int_0^1 x^\gamma \, dx$ **(b)** $\int_1^\infty x^\gamma \, dx$ **(c)** $\int_0^1 \ln x \, dx$

(d) $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x} \, dx$ **(e)** $\int_0^{1/\pi} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx$ **(f)** $\int_0^1 \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right) dx$

4.2. (a) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, dt$$

für alle $x > 0$ konvergiert.

(b) Für alle $x > 0$ definieren wir die *Gammafunktion* $\Gamma(x)$ durch

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \, dt.$$

Zeigen Sie, dass $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für alle $x > 0$ und, dass $\Gamma(n+1) = n!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Votieraufgaben

4.3. (a) Sei $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $A := f(0)$ und $B := \lim_{x\to\infty} f(x) \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie für alle $\alpha, \beta > 0$, dass

$$\int_0^\infty \frac{f(\alpha x) - f(\beta x)}{x} \, dx = (A - B) \cdot \ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right).$$

(b) Berechnen Sie die Integrale

(b$_1$) $\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x} \, dx,$ **(b$_2$)** $\int_0^\infty \frac{\arctan(\alpha x) - \arctan(\beta x)}{x} \, dx.$

4.4. (a) Seien $x \in [0,1[$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 0$$

(b) Zeigen Sie, dass die Binomialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in]-1,1[$ konvergiert und

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

gilt.

Zusatzaufgaben

4.5. Sei $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion und

$$\sigma_n(f) = \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

(a) Angenommen es existiert das (uneigentliche) Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$, so zeigen Sie, dass $\sigma_n(f)$ für $n \to \infty$ konvergiert und

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(f)$$

gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Umkehrung der Aussage aus Teilaufgabe **(a)** nicht gilt, d.h. finden Sie eine monoton fallende Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass $\sigma_n(f)$ konvergiert, das uneigentliche Integral $\int_0^1 f(x)\,dx$ jedoch divergiert.

(c) Zeigen Sie die Umkehrung der Aussage aus Teilaufgabe **(a)** unter der zusätzlichen Annahme, dass f in $x = 0$ oder $x = 1$ beschränkt ist.