Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Kourosh Sanei Kashani
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Woche: 18. Mai - 24. Mai 2015

Analysis II (SS 2015) — Blatt 5

In the middle of the twentieth century it was attempted to divide physics and mathematics. The consequences turned out to be catastrophic. Whole generations of mathematicians grew up without knowing half of their science and, of course, in total ignorance of any other sciences. They first began teaching their ugly scholastic pseudo-mathematics to their students, then to schoolchildren (forgetting Hardy's warning that ugly mathematics has no permanent place under the Sun).
(V. I. Arnold (1937 - 2010) in "On teaching mathematics")

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

5.1. **(a)** Seien $f :]a,b[\to \mathbb{R}^n$ mit $a < b$ differenzierbar in $t_0 \in]a,b[$ und $\varphi :]c,d[\to]a,b[$ mit $c < d$ differenzierbar in $s_0 \in]c,d[$ mit $\varphi(s_0) = t_0$. Zeigen Sie, dass dann auch $f \circ \varphi$ differenzierbar in s_0 ist und

$$(f \circ \varphi)'(s_0) = \varphi'(s_0) \cdot f'(\varphi(s_0))$$

gilt.

(b) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}^d$ stetig, in $]a,b[$ differenzierbar und es existiere der linksseitige Grenzwert $\lim_{x \to b-0} f'(x)$. Zeigen Sie, dass f in $x = b$ linksseitig differenzierbar ist und

$$f'(b) = \lim_{x \to b-0} f'(x)$$

gilt.

5.2. Wir betrachten ein ruhendes, aufrecht stehendes Rad mit Radius R. Der Auflagepunkt P dieses Rades wird markiert. Anschließend beginnt das Rad in eine Richtung zu rollen.
Parametrisieren Sie die Kurve, welche P durchläuft und berechnen Sie die von P während einer Radumdrehung zurückgelegte Wegstrecke.

Votieraufgaben

5.3. Seien $d \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ fest gewählt. Für $f \in C^k([a,b], \mathbb{R}^d)$ setzen wir

$$||f||_{k,\infty} := \sum_{j=0}^{k} \max \{||f^{(j)}(t)|| \, : \, a \leq t \leq b\},$$

wobei $|| \cdot ||$ die euklidische Norm auf dem $\mathbb{R}^d$ bezeichnet.
Zeigen Sie, dass $|| \cdot ||_{k,\infty}$ eine Norm auf $C^k([a,b], \mathbb{R}^d)$ definiert und, dass $(C^k([a,b], \mathbb{R}^d), || \cdot ||_{k,\infty})$ ein Banachraum ist.

5.4. **(a)** Sei

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

stetig, differenzierbar in $]a,b[$ mit $-\infty \le a < b \le \infty$ derart, dass die Ableitungen x' und y' nur in endliche vielen Punkten verschwinden[1]. Angenommen die von φ parametrisierte Kurve ist geschlossen, d.h. es ist $\varphi(a) = \varphi(b)$ und bezeichne A den Inhalt der von der Kurve begrenzten Fläche, so zeigen Sie, dass

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b \left(y(t)x'(t) - y'(t)x(t) \right) dt.$$

(*Hinweis:* Zeichnen Sie eine derartige Kurve in ein Koordinatensystem und interpretieren Sie entsprechende Teilstücke als Graphen einer Funktion $x \mapsto y(x)$.)

(b) Sei $a > 0$. Die Kurve, welche als Lösungsmenge der Gleichung

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

gegeben ist, umschließt im 1. Quadranten eine Fläche. Parametrisieren Sie die Kurve und berechnen Sie den umschlossenen Flächeninhalt.

Zusatzaufgaben

5.5. Berechnen Sie bis auf einen Fehler von nicht mehr als 10%:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^{100} x \, dx$ **(b)** $\displaystyle\int_1^{10} x^x \, dx$

(*Quelle: "Aufgaben für Kinder von 5 bis 15 Jahren", V. I. Arnold, Paris 2004*)

[1] Diese Voraussetzung ist rein technischer Natur, vereinfacht den Beweis jedoch entscheidend. Später werden wir diesem Satz nochmals in einer allgemeineren Form begegnen.