Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Kourosh Sanei Kashani
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Woche: 25. Mai - 7. Juni 2015

Analysis II (SS 2015) — Blatt 6

Say what you know, do what you must, come what may.
(Sofia Vasilyevna Kovalevskaya, 1850 - 1891)

Es gibt keine schriftlich abzugebenden Aufgaben.
Votieraufgaben

6.1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^d$ stetig und differenzierbar auf $[a, b[$ mit $f'(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b[$. Sei K eine Kurve mit der Darstellung $(f, [a, b])$ und es konvergiere das (möglicherweise uneigentliche) Integral $\int_a^b ||f'(t)||\, dt$. Zeigen Sie, dass dann K rektifizierbar ist und die Länge $L(K)$ von K durch

$$L(K) = \int_a^b ||f'(t)||\, dt$$

gegeben ist.

6.2. **(a)** Sei $||f||_1$ für $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ gegeben durch

$$||f||_1 := \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Zeigen Sie, dass $||f||_1$ eine Norm auf $C([a, b], \mathbb{R})$ definiert.

(b) Ist $(C([0, 1], \mathbb{R}), || \cdot ||_1)$ vollständig?
(*Hinweis:* Betrachten Sie Funktionen welche zunächst linear ansteigen, maximal aber den Wert 1 annehmen.)

6.3. Bekanntlich ist $\cos x \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie ausgehend davon, dass

$$T_{2n+1}(\sin, x, 0) \leq \sin x \leq T_{2n}(\sin, x, 0)$$
$$T_{2n+1}(\cos, x, 0) \leq \cos x \leq T_{2n}(\cos, x, 0)$$

für alle $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gelten. Hierbei bezeichnet $T_n(f, x, 0)$ das n-te Taylorpolynom einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bei Entwicklung in $x_0 = 0$.

6.4. **(a)** Sei $f \in C^2([a, b], \mathbb{R}^d)$ eine Funktion für die die Abbildung $x \mapsto ||f(x)||^2$ konstant ist. Zeigen Sie, dass dann

$$\langle f(x), f'(x) \rangle = 0$$

für alle $x \in [a, b]$ gilt.

Bezeichne K eine Kurve im $\mathbb{R}^2$ und sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine Bogenlängenparametrisierung von K. Die Tangente $t(s)$ an K bei einer Stelle $s \in [a, b]$ ist durch $t(s) = \varphi'(s)$ gegeben, den Einheitsnormalenvektor[1] an die Kurve für $s \in [a, b]$ bezeichnen wir mit $n(s)$. In diesem Zusammenhang bedeutet die Aussage aus Teilaufgabe **(a)** gerade, dass

$$t'(s) = \kappa(s) \cdot n(s)$$

für alle $s \in [a, b]$ mit einem Faktor $\kappa(s) \in \mathbb{R}$. Prüfen Sie dies nach!

[1] Dieser Vektor entsteht durch Drehung von $t(s)$ um $\pi/2$, d.h. $n(s) = Dt(s)$ mit $D(x, y)^T = (-y, x)^T$.

(b) Geben Sie die Bogenlängenparametrisierung für einen Kreis um den Ursprung mit Radius R an und berechnen Sie κ für diesen Fall.

Ist eine Kurve K nach der Bogenlänge parametrisiert, so definieren wir deren *Krümmung* an der Stelle $s \in [a, b]$ als den Proportionalitätsfaktor $\kappa(s)$. Es gilt dann

$$\kappa(s) = \langle t'(s), n(s) \rangle \qquad \text{bzw.} \qquad |\kappa(s)| = ||t'(s)||.$$

Ist eine Kurve nicht in Bogenlängenparametrisierung gegeben, so sei g eine Umparametrisierung auf die Bogenlänge L. Die Krümmung ist dann durch

$$\kappa(t) := \kappa_g(L(t))$$

gegeben, wobei κ_g die Krümmung der umparametrisierten Kurve angibt.

(c) Sei K eine durch $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ parametrisierte Kurve mit $\varphi(t) = (x(t), y(t))^T$ für alle $t \in [a, b]$, so zeigen sie, dass

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{3/2}}$$

für alle $t \in [a, b]$ gilt.

(d) Sei $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$, so bezeichnet

$$\operatorname{graph}(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x \in [a, b]\}$$

den *Graphen* der Funktion. Zeigen Sie, dass die Krümmung des Funktionsgraphen von f an der Stelle $x \in [a, b]$ durch

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}$$

gegeben ist.

Zusatzaufgaben

6.5. **(a)** Sei $[a, b]$ ein Intervall und (α, β) ein Paar zweier Zahlen $\alpha, \beta \in [a, b]$ mit $\alpha \leq \beta$. Auf der Menge dieser Paare sei eine Funktion $I : (\alpha, \beta) \mapsto I(\alpha, \beta)$ mit der Eigenschaft, dass

$$I(\alpha, \beta) + I(\beta, \gamma) = I(\alpha, \gamma)$$

für alle $\alpha, \beta\gamma \in [a, b]$ gilt.
Angenommen zu I gibt es eine regelintegrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sodass

$$(\beta - \alpha) \cdot \inf_{x \in [\alpha, \beta]} f(x) \leq I(\alpha, \beta) \leq (\beta - \alpha) \cdot \sup_{x \in [\alpha, \beta]} f(x)$$

für alle $\alpha, \beta \in [a, b]$ mit $\alpha \leq \beta$ gilt, so zeigen Sie, dass

$$I(a, b) = \int_a^b f(x) \, dx$$

(b) Sei $f \in C^1([a, b], \mathbb{R}^d)$ die Parametrisierung einer Kurve, so schließen Sie aus der Aussage aus Teilaufgabe **(a)** auf die bekannte Formel

$$L = \int_a^b ||f'(t)|| \, dt$$

zur Berechnung der Länge der Kurve.