Analysis II (SS 2015) — Blatt 7

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

7.1. (a) Seien $a > 0$ und $f \in C^4([-a,a],\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \frac{a}{3}\big(f(-a) + 4\cdot f(0) + f(a)\big) + R(a;f)$$

wobei

$$R(a;f) = \int_{-a}^{a} \left(\frac{(a-|x|)^4}{24} - \frac{a(a-|x|)^3}{18}\right)\cdot f^{(4)}(x)\,dx.$$

(*Hinweis:* Taylorentwicklung von $\int_0^{\pm a} f(x)\,dx$ und $f(\pm a)$ in a, dann Integralrestglied.)

(b) Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in [-a,a]$ gibt, sodass $R(a;f) = -\frac{a^5}{90}f^{(4)}(\xi)$, bzw. dass

$$|R(a;f)| \leq \frac{a^5}{90}\cdot \sup_{x\in[-a,a]} |f^{(4)}(x)|.$$

(c) Obige Näherungsformel für die Berechnung eines Integrals wurde 1613 von Johannes Kepler bei den Vorbereitungen zu seiner (zweiten) Hochzeit "entdeckt". Er beobachtete dabei wie der Weinhändler das Volumen eines Fasses mit Hilfe einer Messrute, welche durch das Spundloch eines Fasses eingeführt wird berechnet. Angenommen wir kennen die Höhe h eines Weinfasses, sowie dessen Umfänge U_b (am Boden), U_m (in der Mitte) und U_d (am Deckel), welche Näherungsformel hat Kepler dann wohl aufgestellt?

7.2. Berechnen Sie nährungsweise das Integral

$$\int_0^{\pi} \cos(x)dx$$

(a) mit der Trapezformel,

(b) mit der Keplerschen Fassregel.

Vergleichen Sie in beiden Fällen den tatsächlichen Fehler mit theoretisch vorhergesagten.

Votieraufgaben

7.3. (a) Berechnen Sie die Krümmung der Zykloide $Z(t) = (a(t-\sin(t)), a(1-\cos(t)))$, mit $t \in]0,2\pi[$ und $a > 0$.

(b) Zeigen Sie, dass die Kurve $c :]0,\infty[\to \mathbb{R}^3$,

$$c(t) := \frac{t}{\sqrt{3}}\left(\cos(\ln(t)), \sin(\ln(t)), 1\right)$$

nach Bogenlänge parametrisiert ist und bestimmen Sie ihre Krümmung.

(c) Sei K eine glatte Kurve im $\mathbb{R}^2$ mit Bogenlängenparametrisierung

$$c \in C^2([0,L] \to \mathbb{R}^2),\ c(s) = (x(s), y(s))^T$$

und $\kappa(s)$ die vorzeichenbehaftete skalare Krümmung (wie in Aufgabe 6.4 definiert). Zeigen Sie, dass die Kurve durch Vorgabe von $\kappa(s)$, $c(0)$ und $c'(0)$ eindeutig bestimmt ist. Was passiert mit der Kurve, wenn $c(0)$ und $c'(0)$ verändert werden? (*Hinweis:* Verwenden Sie als Ansatz für den Tangentenvektor $c'(s) = (\cos(\alpha(s)), \sin(\alpha(s)))^T$ mit $\alpha(s) \in C^1([0,L], \mathbb{R})$. Leiten Sie daraus eine eindeutige Parameterdarstellung der Kurve her.)

7.4. Skizzieren Sie in $\mathbb{R}^3$ den Graphen der Funktion

(a) $f(x,y) = \sin(x+y), \quad x, y \in \mathbb{R}$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 1, & x = y = 0 \end{cases}$.

Geben Sie jeweils Mengen mit konstanten Funktionswerten an.