Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Kourosh Sanei Kashani
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis II (SS 2015) — Blatt 8

Tu as voulu de l'algèbre, et tu en auras jusqu'au menton!
(Jules Verne, 1828 - 1905 in "Autour de la Lune", IV Un peu d'Algèbre)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

8.1. **(a)** Seien $(V, ||\cdot||_V)$ und $(W, ||\cdot||_W)$ normierte Räume und $f : V \to W$ eine stetige lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass die Fréchetableitung $f'(x_0)$ von f in einem inneren Punkt $x_0 \in V$ durch

$$f'(x_0) = f$$

gegeben ist.

(b) Berechnen Sie die Fréchetableitung der Abbildung

$$d : (C^1([a,b],\mathbb{R}), ||\cdot||_{1,\infty}) \to (C([a,b],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty), \qquad f \mapsto df := f',$$

wobei $||\cdot||_\infty$ und $||\cdot||_{1,\infty}$ die Normen aus Aufgabe **5.3** bezeichnen.

(c) Berechnen Sie die Fréchetableitung der Abbildung

$$\mathrm{I} : (C([a,b],\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f \mapsto \mathrm{I}f := \int_a^b f(x)\,dx.$$

8.2. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

Zeigen Sie, dass in $(0,0)$ zwar alle Richtungsableitungen existieren, die Funktion in $(0,0)$ jedoch nicht fréchetdifferenzierbar ist. Ist f in $(0,0)$ stetig? Welche der Voraussetzungen in **Satz 11.26** aus der Vorletzung wird von f verletzt?

Votieraufgaben

8.3. Seien $f, g : V \to W$ und $\varphi : V \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in V$ fréchetdifferenzierbar. Zeigen Sie, dass dann auch $\alpha f + \beta g$ für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und φf in x_0 fréchetdifferenzierbar sind und sich die Ableitungen gemäß

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$
$$(\varphi f)'(x_0) = \varphi(x_0) f'(x_0) + f(x_0)\varphi'(x_0)$$

berechnen.
Analysieren Sie bei der "Produktregel" zusätzlich die Struktur des Ausdrucks. Spielt die Reihenfolge der Terme eine Rolle?

8.4. [1] Wir betrachten den Raum $\mathbb{R}^{n\times n}$ aller $(n\times n)$-Matrizen. Auf diesem ist durch die Menge aller Matrizen E_{ij}, deren einziger, von Null verschiedener, Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte Eins ist, eine Basis gegeben. Wir betrachten die Abbildung

$$\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, \qquad A \mapsto \det A$$

wobei $\det A$ die *Determinante* einer Matrix A bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass det eine stetige Abbildung ist.

(b) Berechnen Sie die Richtungsableitung von det in einem beliebigen Punkt $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in Richtung von E_{ij}.

(c) Berechnen Sie die Fréchetableitung von det im Punkt I, wobei I die $(n\times n)$-Einheitsmatrix bezeichnet.

Zusatzaufgaben

8.5. Sei $||\cdot||_\infty$ die Maximumsnorm auf dem $\mathbb{R}^n$ und $||\cdot||$ eine (andere) Norm auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $C \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$||x|| \leq C\,||x||_\infty$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(b) Bezeichne $S_\infty := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, ||x||_\infty = 1\}$ die Einheitskugel bzgl. der Norm $||\cdot||_\infty$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$N : S_\infty \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto ||x||$$

stetig bzgl. der Norm $||\cdot||_\infty$ ist.

(c) Folgern Sie aus Teilaufgabe **(b)**, dass es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$||x|| \geq c\,||x||_\infty$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.
(*Hinweis:* Verwenden Sie, dass S_∞ eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist und die entsprechende Aussage für stetige Funktionen auf kompakten Mengen)

(d) Zeigen Sie, dass alle Normen des $\mathbb{R}^n$ zueinander äquivalent sind, d.h. seien $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ zwei (verschiedene) Normen auf $\mathbb{R}^n$, so gibt es $c, C \in \mathbb{R}$, sodass

$$c\,||x||_1 \leq ||x||_2 \leq C\,||x||_1$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

8.6. Seien $(V, ||\cdot||_V)$ und $(W, ||\cdot||_W)$ zwei endlichdimensionale normierte Räume und

$$B : V \times W \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto B(x,y) = \langle x, y\rangle$$

eine beschränkte Bilinearform, d.h. es gelten

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &\leq ||x||_V \cdot ||y||_W,\\ \langle x_1 + x_2, y\rangle &= \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle,\\ \langle x, y_1 + y_2\rangle &= \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle,\end{aligned}$$

für alle $x, x_1, x_2 \in V$, $y, y_1, y_2 \in W$. Berechnen Sie die Fréchetableitung von B in einem beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \in V \times W$.

[1] Sollten Sie aufgrund fehlender Kenntnisse in der Linearen Algebra den Inhalt dieser Aufgabe nicht verstehen, so lesen Sie ein geeignetes Lehrbuch oder fragen den Tutor oder Assistenten Ihres Vertrauens.