Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Kourosh Sanei Kashani
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Woche: 22. Juni - 26. Juni 2015

Analysis II (SS 2015) — Blatt 9

Es nimmt ja die Mathese, als angewandte Logik, die sich dennoch im rein und hoch Abstrakten hält, eine eigentümliche Mittelstellung zwischen den humanistischen und den realistischen Wissenschaften ein, und aus den Erläuterungen, die Adrian mir gesprächsweise von dem Vergnügen gab, das sie ihm bereitete, ging hervor, daß er diese Zwischenstellung zugleich als erhöht, dominierend, universell empfand, oder, wie er sich ausdrückte, als „das Wahre".
Thomas Mann (1875-1955), Doktor Faustus, Fischer Verlag Seite 61

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

9.1. Gegeben ist die Fläche

$$F \;:=\; \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z = f(x,y) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}y^2\}$$

(a) Im Punkt $(0,0,0)\in F$ steht Roboter I, der Steigungen bis 45% schafft. Zeigen Sie, dass er auf „direktem Weg", d.h. entlang

$$\gamma(t) = (t,t,f(t,t)), \quad 0\le t\le 1/2$$

zum Punkt $(1/2,1/2,f(1/2,1/2))$ gelangen kann.

(b) Roboter II ist nicht so gut und schafft nur 33% Steigung. Finden Sie einen Weg auf der Fläche, auf dem Roboter II von $(0,0,0)$ nach $(1/2,1/2,f(1/2,1/2))$ gelangen kann.
Hinweis: Es kann hilfreich sein, zunächst die Höhenlinien von f zu skizzieren, um so eine geometrische Vorstellung möglicher Wege für Roboter II zu entwickeln.

9.2. Die Funktionen $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ und $\psi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ sind gegeben durch

$$\psi(x,y,z) = 1 - x^2 - y^2 + 2z \quad , \quad \varphi(x,y) = \begin{pmatrix} x^2+2y \\ xy \\ y^2-x^2 \end{pmatrix}.$$

Ferner sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = \psi(\varphi(x,y))$.

(a) Begründen Sie, dass φ und ψ differenzierbar sind.

(b) Berechnen Sie $grad\, f(1,1)$ mit Hilfe der Kettenregel.

(c) Bestimmen Sie die Tangentialebene an die durch $z = f(x,y)$ definierte Fläche im Punkt $(1,1,f(1,1))$.

Votieraufgaben

9.3. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und

$$F(x_1, x_2) := \int_{x_1}^{x_2} f(t)\mathrm{d}t \quad \text{für } a < x_1 < x_2 < b.$$

(a) Skizzieren Sie die Menge $D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : a < x_1 < x_2 < b\} \subseteq \mathbb{R}^2$ für $a = 1$, $b = 3$. Begründen Sie, dass diese Menge offen ist.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von F.

(c) Weisen Sie nach, dass F in jedem Punkt $(x_1, x_2) \in D$ differenzierbar ist. Geben Sie die Ableitung $F'(x_1, x_2)$ an.

(d) Seien $u, o :]c, d[\to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in]c, d[$ und beschränkt mit $a < u(x) < o(x) < b$ für $c < x < d$ und

$$g :]c, d[\to \mathbb{R} : x \mapsto \int_{u(x)}^{o(x)} f(t)\mathrm{d}t.$$

Verwenden Sie die Kettenregel, um die Differenzierbarkeit von g in x_0 nachzuweisen. Berechnen Sie die Ableitung $g'(x_0)$.

9.4. Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \frac{2xy}{1 + x^2y^2} \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Bestimmen Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit

(i) $f(x, y) = 0$,

(ii) $f(x, y) = 1$,

(iii) $f(x, y) = -1$

(„Höhenlinien“), und skizzieren Sie diese in der $xy-$Ebene. Wo ist $f(x, y)$ positiv, wo negativ ?

(b) Zeigen Sie, dass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$-1 \leq f(x, y) \leq 1 .$$

(c) Bestimmen Sie sämtliche Punkte mit horizontaler Tangentialebene und ihre Funktionswerte. Begründen Sie mit Hilfe von **a)** und **b)**, ob Maxima, Minima oder Sattelpunkte vorliegen.

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
Kourosh.Sanei-Kashani@mathematik.uni-stuttgart.de