Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Kourosh Sanei Kashani
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Woche: 15. Juni - 21. Juni 2015**

Analysis II (SS 2015) — Blatt 85

Die Landausymbole wurden in Analysis 1 definiert. Machen Sie sich die Äquivalenz der Definition zu den folgenden Aussagen selbst klar:
Das gegenseitige Verhalten zweier Terme $f(x)$ und $g(x)$ für $x \to a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ wird durch die *Landausymbole* O und o folgendermaßen charakterisiert . Es ist $f(x) = O(g(x))$, falls

$$\limsup_{x \to a} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < \infty$$

und $f(x) = o(g(x))$, falls

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

85.1. Zeigen Sie, dass

(a) $x^n = o(x^{n-1})$ für $x \to 0$ und $x^n = o(x^{n+1})$ für $x \to \infty$,

(b) $\sin x = O(x)$ für $x \to 0$,

(c) $1 - \cos x = o(\sin x)$ für $x \to 0$.

85.2. Für welche $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$(x^2 - x + 2)^4 = o(x^k), \qquad \sqrt{x^4 + 1} = o(x^k), \qquad \frac{x^3}{x^7 + 1} = o(x^k),$$

für $x \to 0$ bzw. $x \to \infty$?

85.3. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned}
f(x) = O(g(x)) \quad &\Rightarrow \quad \lambda \cdot f(x) = O(g(x))) \text{ für } \lambda \in \mathbb{R} \\
f(x) = O(x) \quad &\Rightarrow \quad f(x) = o(x^2) \\
f_1(x) = O(g(x)) \wedge f_2(x) = O(g(x)) \quad &\Rightarrow \quad f_1(x) + f_2(x) = O(g(x))) \\
f_1(x) = o(g_1(x)) \wedge f_2(x) = O(g_2(x)) \quad &\Rightarrow \quad f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g_1(x) \cdot g_2(x))
\end{aligned}$$

85.4. Zeigen Sie:

(a) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann stetig in $a \in \mathbb{R}$, wenn

$$f(x) - f(a) = o(1)$$

für $x \to a$.

(b) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in $a \in \mathbb{R}$ mit Ableitung $f'(a)$, wenn

$$f(a + h) - f(a) - f'(a) \cdot h = o(|h|)$$

für $h \to 0$.