Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Kourosh Sanei Kashani
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis II (SS 2015) — Blatt 10

The calculus is the greatest aid we have to the application of physical truth in the broadest sense of the word.
(William Fogg Osgood, 1864 - 1943)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

10.1. **(a)** Die Funktionen f und g seien gegeben durch

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad g(x,y) = \begin{pmatrix} 2\arctan(x/y) \\ 2\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie für die Funktion $h = f \circ g$ den maximalen Definitionsbereich D sowie mit Hilfe der Kettenregel die Jacobimatrix und den Gradienten.

(b) Bestimmen Sie die Tangentialebene im Punkt $(0, 2, h(0, 2))$ an den Graphen von h.

(c) Bestimmen Sie die Richtung und den Betrag des steilsten Anstiegs von h im Punkt $(0, 2)$. Bestimmen Sie desweiteren den Winkel zwischen $\operatorname{grad} h(0, 2)$ und der Tangente an die Niveaulinie

$$\{(x,y) \in D \mid h(x,y) = h(0,2)\}$$

im Punkt $(0, 2)$.

10.2. Herr Lesky plant mit seinen Tutoren eine Wandertour, das Gebiet, in dem gewandert werden soll, wird dabei (leicht idealisiert) durch den Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto x + \cos x \cdot \cos y$$

beschrieben.

(a) Vorab soll geklärt werden, wo der höchste Gipfel liegt (zwecks schöner Aussicht), daher beauftragt der Dozent seinen Assistenten mit der Berechnung aller lokalen Extrema sowie aller Sattelpunkte. Da der Assistent aber ebenfalls zu faul ist das alles selber auszurechnen, stellt er dies einfach als Übungsaufgabe für die Studenten (was er hiermit getan hat).

(b) Verschiedene Tutoren haben nun Vorschläge für mögliche Wanderrouten gemacht. Die beiden Wege

$$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto (2, t);$$
$$\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto (t, t);$$

haben es dabei in die engere Auswahl geschafft. Auf welchem der beiden Wanderwege ist der maximale Höhenunterschied kleiner (zwecks Faulheit)? Berechnen Sie jeweils auch die lokalen Maxima entlang des Weges.

Votieraufgaben

10.3. Untersuchen Sie die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

auf positive Definitheit, indem

(a) Sie die Vorzeichen der Eigenwerte betrachten.

(b) Sie direkt von der Definition ausgehen und $\langle x, Ax\rangle$ bzw. $\langle x, Bx\rangle$ betrachten.

(c) Sie den Positivitätstest von Jacobi durchführen.

10.4. Seien $u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ in beiden Koordianten x und y 2-mal partiell differenzierbar und $v :]0, \infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $(r, \varphi) \mapsto v(r, \varphi) := u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$.

(a) Drücken Sie $\partial v/\partial r$, $\partial v/\partial \varphi$, $\partial^2 v/\partial r^2$ und $\partial^2 v/\partial \varphi^2$ mit Hilfe von u aus.

(b) Finden Sie eine Formel für $\Delta u := \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$ in Abhängigkeit von v.

10.5. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass

$$f(x+h) - f(x) = \left(\int_0^1 f'(x+th)\, dt \right) \cdot h$$

für alle $x, h \in \mathbb{R}^n$ gilt.
(*Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $t \mapsto f(x+th)$ und wenden sie auf jede Komponente die (eindimensionale) Formel von Newton und Leibniz an.)

Zusatzaufgaben

10.6. Sei $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(u_1, u_2, u_3) \mapsto L(u_1, u_2, u_3)$ stetig differenzierbar Für $a, b \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$F'(f)(h) = \int_a^b ((\partial_2 L(x, f(x), f'(x)))h(x) + (\partial_3 L(x, f(x), f'(x)))h'(x))\, dx$$

(a) Zeigen Sie, dass F fréchetdifferenzierbar ist und die Fréchetableitung durch

$$F'(f)(h) = \int_a^b ((\partial_2 L(x, f(x), f'(x))h(x) + \partial_3 L(x, f(x), f'(x)))h'(x)\, dx$$

gegeben ist.
(*Hinweis:* Zeigen Sie, dass die Abbildung $f \mapsto L(x, f(x), f'(x))$ als Funktion $C^1([a,b], \mathbb{R}) \to C([a,b], \mathbb{R})$ fréchetdifferenzierbar ist.)

(b) Schließen Sie aus Teilaufgabe **(a)**: Ist f ein Extremum von F, so erfüllt f die Gleichung

$$\partial_2 L(x, f(x), f'(x)) - \frac{d}{dx} \partial_3 L(x, f(x), f'(x)) = 0$$

(*Hinweis:* Partielle Integration)

(c) Sei $f \in C^1([0,1], \mathbb{R})$ sodass $f(0) = f(1) = 0$, dann haben wir gezeigt, dass die Länge des Graphen von f durch

$$F(f) = \int_0^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

gegeben ist. Für welches f mit $f(0) = f(1) = 0$ wird diese Länge minimal?