Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Kourosh Sanei Kashani
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis II (SS 2015) — Blatt 11

Quapropter bono christiano, sive mathematici, sive quilibet impie divinantium, maxime dicentes vera, cavendi sunt, ne consortio daemoniorum animam deceptam, pacto quodam societatis irretiant.
(Augustinus von Hippo, 354 - 430, in De Genesi ad Litteram)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

11.1. Berechnen Sie das Taylorpolynom bis einschließlich 3. Ordnung von

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y, z) \mapsto x^2(\sin y + 3\mathrm{e}^z)$$

im Punkt $(1, 0, 0)$.

11.2. Wir betrachten eine stetig differenzierbare Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ für ein $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$. Desweiteren existieren in (x_0, y_0, z_0) alle partiellen Ableitungen $\partial_x F$, $\partial_y F$ und $\partial_z F$, diese seien ungleich Null. Dann lässt sich die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ lokal in Funktionen $x = x(y, z)$, $y = y(x, z)$ und $z = z(x, y)$ auflösen. Man zeige nun für die auflösenden Funktionen die Identität

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)} = -1.$$

(*Hinweis:* Einfach kürzen führt offensichtlich nicht zum Ziel.)

Votieraufgaben

11.3. Wir betrachten die Gleichung

$$x^y = y^x.$$

Ist diese in $(x, y) = (2, 4)$, $(x, y) = (1, 1)$ und $(x, y) = (\mathrm{e}, \mathrm{e})$ nach eine der Variablen auflösbar? Falls ja, nach welcher?

11.4. **(a)** Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in beiden Koordinaten zweifach partiell differenzierbar mit stetigen partiellen Ableitungen und $\partial F/\partial y \neq 0$ in einem Punkt. So zeigen Sie, dass die auflösende Funktion $y = y(x)$ ebenfalls zweifach differenzierbar ist und die zweite Ableitung durch

$$y''(x) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \cdot y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \cdot (y')^2}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

gegeben ist.

(b) Sei $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ für ein $a > 0$. Berechnen Sie alle lokalen Extrema der auflösenden Funktion $y = y(x)$.

Zusatzaufgaben

11.5. **(a)** Für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist durch

$$||A||_{\text{op}} := \max_{x\in\mathbb{R}^n,\, ||x||=1} ||Ax||$$

eine Norm, die *Operatornorm*, gegeben (verifizieren Sie das), $||\cdot||$ bezeichnet dabei die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$.
Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $||A||_{\text{op}} < 1$ gegeben, so zeigen Sie, dass die Matrix $E_n - A$ mit der Einheitsmatrix $E_n \in \mathbb{R}^{n\times n}$ invertierbar ist und die inverse Matrix durch

$$(E_n - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

gegeben ist.

(b) Bezeichne

$$\mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \;:\; A \text{ ist invertierbar}\}$$

die Menge der invertierbaren Matrizen. Dann folgt aus Teilaufgabe **(a)**, dass diese offen in $(\mathbb{R}^{n\times n}, ||\cdot||_{\text{op}})$ ist (verifizieren Sie das).
Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathrm{GL}(n;\mathbb{R}) \to \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$, $A \mapsto A^{-1}$ für alle $A \in \mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ fréchetdifferenzierbar ist und die Ableitung im Punkt A durch

$$f'(A)(B) = A^{-1}BA^{-1}$$

gegeben ist.

11.6. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$ und α, β Multiindizes der Länge n, so zeigen Sie, dass

(a) $$(x+y)^\alpha = \sum_{\beta\le\alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha-\beta},$$

(b) $$(x_1 + \cdots + x_n)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha.$$