Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Kourosh Sanei Kashani
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis II (SS 2015) — Blatt 12

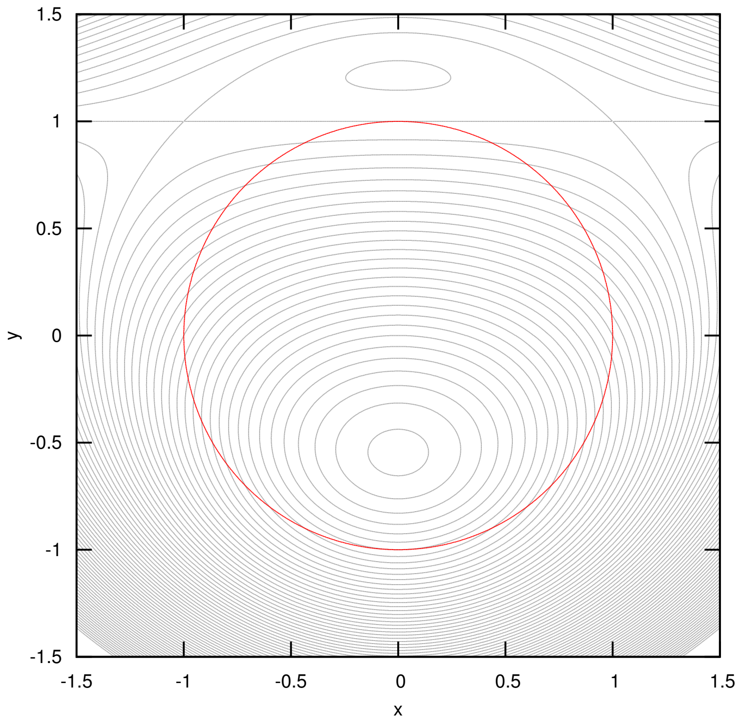
[...] But most of the time, doing mathematics for me is like being on a long hike with no trail and no end in sight.
(Maryam Mirzakhani in an Interview with the Guardian, 2014)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

12.1. Da sich das Wandergebiet aus Aufgabe **10.2** als wenig reizvoll erwiesen hat, soll nun in einem anderen Gebiet, welches (ebenso leicht idealisiert) durch den Graphen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto (1 - y)(2 - x^2 - y^2).$$

beschrieben wird, gewandert werden. Um ähnliche Missgeschicke wie beim letzten Mal zu vermeiden hat der Dozent seinem Assistenten nun nahegelegt vorher einen kurzen Blick auf die Karte zu werfen:



In dieser hat der Assistent neben den Höhenlinien (grau) bereits den Wanderweg (rot), welcher durch die Nullstellenmenge der Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 1$$

beschrieben wird, eingezeichnet.

(a) Berechnen Sie die Lage aller Extrema und Sattelpunkte von f und finden Sie diese in der Karte wieder.

(b) Berechnen Sie die Extrempunkte entlang des Weges und deuten Sie Ihr Ergebnis anhand der Karte.

© jan.koellner@mathematik.uni-stuttgart.de lesky@mathematik.uni-stuttgart.de
Kourosh.Sanei-Kashani@mathematik.uni-stuttgart.de

12.2. Eine positive Zahl a soll so in drei positive Summanden x, y, z zerlegt werden, dass der Ausdruck

$$x^n y^m z^l$$

zu gegebenem $n, m, l \in \mathbb{N}$ maximal wird. Überlegen Sie, warum dieses Problem eine eindeutige Lösung (x, y, z) mit $x, y, z > 0$ besitzt und bestimmen Sie diese.
(*Hinweis:* Maximieren Sie anstelle des gesuchten Ausdrucks seinen Logarithmus.)

Votieraufgaben

12.3. Wird ein Ellipsoid, welches durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

mit $a > b > c$ beschrieben wird, mit einer Ebene

$$px + qy + rz = 0, \qquad p, q, r \neq 0,$$

welche durch den Ursprung verläuft geschnitten, so entsteht als Schnittkurve eine Ellipse. Bestimmen Sie die Länge der Halbachsen dieser Ellipse, indem Sie dieses Problem als Extremwertproblem formulieren und mit dem Lagrangeansatz lösen.

12.4. Seien $K \in C([0,1]\times[0,1], \mathbb{R})$ mit $||K||_\infty < 1$ und $f \in C([0,1], \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $T_{K,f}u = u$ mit $T_{K,f} : C([0,1], \mathbb{R}) \to C([0,1], \mathbb{R})$,

$$T_{K,f}\, u(x) := f(x) - \int_0^1 K(x,y)u(y)\, dy$$

genau eine Lösung $u^* \in C([0,1], \mathbb{R})$ besitzt.

Zusatzaufgaben

12.5. Wir betrachten die Quadratische Form

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

für $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ und Koeffizienten $a_{ij} \in \mathbb{R}$, welche $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $i, j = 1, \dots, n$ erfüllen. Zeigen Sie, dass das Maximum (bzw. Minimum) von f gerade der größte (bzw. kleinste) Eigenwert der Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

ist.