Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Kourosh Sanei Kashani
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis II (SS 2015) — Blatt 13

Die Mathematik als Fachgebiet ist so ernst, dass man keine Gelegenheit versäumen sollte, dieses Fachgebiet unterhaltsamer zu gestalten.
(Blaise Pascal, 1623-1662)

13.1. **(a)** Zeigen Sie für alle $k, n \in \mathbb{N}$, dass

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1-x^8}\,dx = \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n(8n+k)}.$$

(b) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{4\sqrt{2} - 8x^3 - 4\sqrt{2}x^4 - 8x^5}{1-x^8}\,\mathrm{d}x$$

um mit Hilfe von Teilaufgabe **(a)** die Darstellung von π durch die *Bailey-Borwein-Plouffe-Reihe*

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n} \left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6} \right)$$

zu zeigen.

13.2. Berechnen Sie das Volumen des n-dimensionalen Standardsimplex

$$\Delta^n := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, x_1, \dots, x_n \geq 0 \,\wedge\, x_1 + \dots + x_n \leq 1\}.$$

Skizzieren Sie auch die Simplizes für $n \in \{1, 2, 3\}$.

13.3. Wir betrachten die Funktion

$$f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto f(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{x^2} & 0 < y < x, \\ -\frac{1}{y^2} & 0 < x < y, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie die Integrale

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx,$ **(b)** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy.$

13.4. Wir betrachten die beiden *elliptischen Integrale*

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}\, d\vartheta, \qquad K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}$$

für $k \in]0, 1[$. Zeigen Sie, dass zwischen diesen der Zusammenhang

$$\textbf{(a)} \quad \frac{dE}{dk} = \frac{E - K}{k} \qquad\qquad \textbf{(b)} \quad \frac{dK}{dk} = \frac{E}{k(1 - k^2)} - \frac{K}{k}$$

besteht.
Hinweis: Zeigen Sie für Teilaufgabe **(b)**, dass

$$\frac{1}{(1 - k^2 \sin^2 \vartheta)^{3/2}} = \frac{1}{1 - k^2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} - \frac{k^2}{1 - k^2} \frac{d}{d\vartheta} \frac{\sin \vartheta \cos \vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}}.$$

Zusatzaufgaben

13.5. Die in Teilaufgabe **13.1 (b)** gegebene Reihe erlaubt es einzelne Stellen von π in der Hexidezimaldarstellung

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{16^n}$$

ohne Kenntniss der vorherigen Stellen zu berechnen. Hierzu einige Gedanken:

- Die n-te Stelle von π ist gegeben durch

$$a_n = \lfloor (16^{n-1}\pi \mod 1) \cdot 16 \rfloor.$$

- Multiplizieren wir die Reihe mit 16^{n-1} und betrachten nur den nichtganzzahligen Anteil, so ist dieser durch $4\Sigma_1 - 2\Sigma_4 - \Sigma_5 - \Sigma_6$ mit

$$\Sigma_l = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{16^{n-k-1} \mod (8k + l)}{8k + l} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{16^{n-k-1}}{8k + l},$$

  $l = 1, 4, 5, 6$ gegeben.
- Eine effiziente Berechnung von $16^{n-k-1} \mod (8k + l)$ ist leicht realisierbar.

Berechnen Sie die 2015-te Stelle von π im Hexadezimalsystem.

Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Kourosh Sanei Kashani
FB Mathematik, Universität Stuttgart

13.6

England im Jahre 932, dem Jahre des Herrn. König Arthur zieht mit seinen Rittern der Tafelrunde durch die Lande, auf der Suche nach dem Heiligen Gral. Nachdem sie bereits zahlreiche Gefahren überstanden hatten, kamen die tapfren Recken an eine tiefe Schlucht, über die nur eine einzige Brücke führte, welche von einem Wächter bewacht wurde. Um die Brücke betreten zu dürfen müssen die Ritter drei schwierige Fragen beantworten. Liegen sie nur bei einer einzigen Frage falsch, so sind sie des Todes. Als erstes tritt der mutige Ritter Lanzelot vor:

Wächter: Stop: Wer über die Brücke des Todes will gehn, muß dreimal Rede und Antwort stehn, erst dann darf er die andere Seite sehn.

Lanzelot: Stell deine Fragen, Wächter der Brücke, ich fürchte mich nicht!

Wächter: Wie lautet dein Name?

Lanzelot: Sir Lanzelot von Camelot.

Wächter: Was ist dein Auftrag?

Lanzelot: Die Suche nach dem heiligen Gral.

Wächter: Wie lautet der Wert des Integrals $\int_0^{\pi/2} \ln\left(a^2 - \sin^2\varphi\right) d\varphi$ in Abhängigkeit von $a > 1$?

Da Mathematik im Jahre 932 noch nicht zur Grundausbildung eines Ritters gehörte ist unser tapferer Sir Lanzelot nun ratlos. Können Sie ihm helfen?