Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
Dipl.-Math. Kourosh Sanei Kashani
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis II (SS 2015) — Blatt 105

Uns ist in alten mæren unders vil geseit
von heleden lobebæren von grozer arebeit...
(Auenture von den Nibelungen, 1. Aventiure, Handschrift C)

Anleitung

Da es vereinzelt noch Probleme beim Anwenden der Kettenregel in Aufgabe **10.4** gab und evtl. noch Übungsbedarf besteht hier nun eine etwas ausführlichere Aufgabe. Die Rechnung ist zwar lang, dafür sind alle (algebraischen) Schritte bewusst einfach gehalten. Denjenigen, die Aufgabe **10.4** bereits verstanden haben und dort keine Probleme hatten wird diese Aufgabe nicht helfen, alle Andren sollten diese Rechnung meistern um gestärkt aus dieser mühsamen Arbeit hervorzugehen.
Die einzelnen Rechenschritte sind wie üblich abschnittsweise in Teilaufgaben unterteilt, diese sollten der Reihe nach erledigt werden. Am Ende jeder Teilaufgabe sind Zwischenergebnisse angegeben. Decken Sie diese zunächst ab und versuchen Sie den Aufgabnteil selbständig zu lösen, vergleichen Sie dann das angegebene Ergebnis mit dem Ihrigen. Stimmen beide Ergebnisse nicht miteinander überein suchen Sie in Ihrerer Rechnung nach Fehlern und versuchen Sie zu verstehen, was Sie falsch gemacht haben. Modifizieren Sie dann Ihrere Rechnung, sodass sie dem Ergebnis "entgegen rechnen".
Sollten Sie trotz allem Suchens nicht verstehen wo der Fehler liegt, so wenden Sie sich an den Tutor oder Assistenten Ihres Vertrauens.

105.1. Sei f eine Funktion (mindestens C^2, sodass das Vertauschen irgendwelcher Ableitungen keine Probleme macht) in drei Variablen, z.B. $f = f(x, y, z)$ oder $f = f(t, u, v)$ (der Einfachheit halber wollen wir hierbei nicht unterscheiden welche der Variablen wir jeweils einsetzen). Es soll der Ausdruck

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + yz \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + xz \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0$$

in neue Koordinaten t, u, v, wobei

$$x = uv, \qquad y = vt, \qquad z = tu,$$

transformiert werden.

(a) Berechnen Sie die Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial u}$ und $\frac{\partial f}{\partial v}$.
Ergebnisse:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = v\frac{\partial f}{\partial y} + u\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial u} = v\frac{\partial f}{\partial x} + t\frac{\partial f}{\partial z}, \quad \frac{\partial f}{\partial v} = u\frac{\partial f}{\partial x} + t\frac{\partial f}{\partial y}.$$

(b) Schließen Sie daraus auf

$$\begin{aligned} x\frac{\partial f}{\partial x} &= -\frac{1}{2}t\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}u\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}v\frac{\partial f}{\partial v}, \\ y\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2}t\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}u\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{2}v\frac{\partial f}{\partial v}, \\ z\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2}t\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}u\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}v\frac{\partial f}{\partial v}. \end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = x\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\frac{\partial f}{\partial x} - f\right)$$

und verwenden Sie dies um $x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ zu berechnen.
Ergebnis:

$$\begin{aligned} x^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =& \frac{1}{4}t^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \frac{1}{4}u^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{1}{4}v^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{1}{2}uv\,\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2}tu\,\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial u} - \frac{1}{2}tv\,\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial v} \\ &+ \frac{3}{4}t\,\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{4}u\,\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{4}v\,\frac{\partial f}{\partial v} \end{aligned}$$

Verfahren Sie genauso mit $y^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ und $z^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ (oder vertauschen Sie im Endergebnis die Buchstaben).

(d) Verwenden Sie

$$yz\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = z\,\frac{\partial}{\partial z}\left(y\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

um $yz\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ zu berechnen.
Ergebnis:

$$yz\,\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{1}{4}t^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \frac{1}{4}u^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} - \frac{1}{4}v^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \frac{1}{2}uv\,\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + \frac{1}{4}t\,\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{4}u\,\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{4}v\,\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Verfahren Sie genauso mit $xy\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$ und $xz\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ (oder vertauschen Sie im Endergebnis die Buchstaben).

(e) Schließen Sie aus den Teilaufgaben **(c)** und **(d)**, dass

$$t^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + u^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + v^2\,\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 0.$$