Prüfungsklausur — Analysis III (WS 2015/16)

Termin:	*30.03.2016*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen.* *Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist. Alle verwendeten Aussagen und Sätze sind dabei zu kennzeichnen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*120 min*

Name:

Matrikel-Nr.:

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	Σ

Aufgabe 1. (5 Punkte)

(a) Formulieren Sie ein Kriterium, welches sicherstellt, dass eine Funktion $f : O \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $O \subset \mathbb{C}$ holomorph ist.

(b) Gibt es eine holomorphe Funktion, welche ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ in die reelle Achse abbildet und nicht konstant ist? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Gegeben sei die Funktion f mit

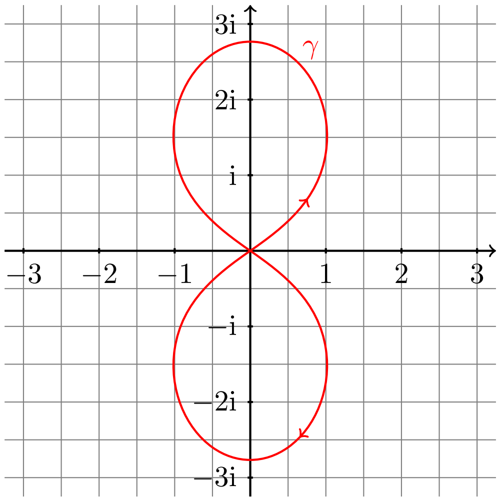
$$z \mapsto f(z) = \frac{1}{(z^2+1)\,\cos z}.$$

(a) Geben Sie alle Singularitäten von f an und berechnen Sie die entsprechenden Residuen.

(b) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_\gamma f(z)\,dz$$

entlang des in der folgenden Skizze gegebenen Weges γ:



Aufgabe 3. (9 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Satz von Liouville wie in der Vorlesung angegeben.

(b) Beweisen Sie den Satz von Liouville.

(c) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante, ganze Funktion. Zeigen Sie, dass es für alle $w \in \mathbb{C}$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $z_\varepsilon \in \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$|f(z_\varepsilon) - w| < \varepsilon$$

gilt.

Aufgabe 4. (8 Punkte)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = 2x\, \mathrm{e}^{y-x^2}, \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems.

(b) Geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung in Abhängigkeit von $y_0 \in \mathbb{R}$ an.

(c) Die Differentialgleichung in obigem Anfangswertproblem besitzt die Form

$$y' = f(x, y)$$

mit einer stetigen Fuktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Welche zusätzliche Voraussetzung muss f erfüllen, damit für das Anfangswertproblem in jedem Quadrat

$$\mathcal{Q} := [-1, 1] \times [y_0 - 1, y_0 + 1]$$

der Satz von Picard-Lindelöf anwendbar ist?
Prüfen Sie diese Voraussetzung für das gegebene Anfangswertproblem.

Aufgabe 5. (9 Punkte)
Gegeben sei das Vektorfeld

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x(\cos y)^2 \\ y - (\sin y)(\cos y) \\ z + x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

Desweiteren betrachten wir die Flächen

$$F_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 0\},$$
$$F_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0\}.$$

(a) Skizzieren Sie beide Flächen.

(b) Bestimmen Sie die drei Integrale

$$\text{(i)} \quad \int_{F_1} A \cdot n\, d\sigma, \qquad \text{(ii)} \quad \int_V \operatorname{div} A\, dx, \qquad \text{(iii)} \quad \int_{F_2} A \cdot n\, d\sigma.$$

In (ii) sei V das von den beiden Flächen eingeschlossene Volumen, in (i) und (iii) seinen die Normalenvektoren n jeweils so orientiert, dass sie bzgl. V nach außen zeigen.