Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Prüfungsklausur — Analysis III (WS 2015/16)

Termin:	*30.03.2016*
Hinweise:	*Lösen Sie bitte jede der Aufgaben auf einem neuen Blatt.* *Alle nicht in der Vorlesung behandelten Sachverhalte sind zu beweisen, Lösungsschritte entsprechend zu begründen.* *Aussagen und Sätze aus der Vorlesung dürfen ohne Beweis verwendet werden, sofern der Beweis nicht Gegenstand der Aufgabe ist. Alle verwendeten Aussagen und Sätze sind dabei zu kennzeichnen.* *Am Ende der Klausur alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**keine**
Bearbeitungszeit:	*120 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	Σ

Aufgabe 1. (5 Punkte)

(a) Formulieren Sie ein Kriterium, welches sicherstellt, dass eine Funktion $f : O \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $O \subset \mathbb{C}$ holomorph ist.

(b) Gibt es eine holomorphe Funktion, welche ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ in die reelle Achse abbildet und nicht konstant ist? Begründen Sie Ihre Antwort ausführlich.

Lösung 1.

(a) Denkbare Kriterien sind z.B.:

- f ist holomorph, falls f in allen Punkten $z_0 \in O$ differenzierbar ist, für alle $z_0 \in O$ also der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert.

- f ist holomorph, falls f auf O beliebig oft differenzierbar ist.

- f ist holomorph, wenn Real- und Imaginärteil die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf O erfüllen. Schreibt man f in der Form $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ mit $u, v \in C^1(O, \mathbb{R})$, so ist f holomorph, falls u und v die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

erfüllen.

- f ist holomorph, wenn f in allen Punkten $z_0 \in O$ lokal als Potenzreihe darstellbar ist, d.h. wenn es für alle $z_0 \in O$ ein $r > 0$ gibt, sodass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n$$

für alle $z \in B_r(z_0)$ gilt.

- Holomorphie von f folgt aus dem Satz von Morera: f ist holomorph, wenn f stetig ist und das Integral

$$\int_{\partial D} f(z) \, dz$$

entlang des Randes aller möglicher abgeschlossener Dreiecksflächen $D \subset O$ verschwindet.

- f ist holomorph, wenn f lokal eine Stammfunktion besitzt, d.h. falls es für alle $z_0 \in O$ ein $r > 0$ gibt, sodass f auf $B_r(z_0)$ eine Stammfunktion besitzt.

- f ist holomorph, wenn f stetg ist und das Integral

$$\int_{\gamma} f(z) \, dz$$

über alle geschlossenen, nullhomotopen Wege $\gamma \subset O$ verschwindet.

- f ist holomorph, falls f stetg ist und für alle zueinander homotopen Wege γ_1, γ_2 das Integeral entlang dieses Weges gleich ist, d.h.

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$

gilt.

(b)

- Annahme: Es gibt eine solche Funktion f. Aus dem Satz über Gebietstreue folgt, dass dann $f(G)$ ein Gebiet, insbesondere offen ist. Wähle $z_0 \in f(G)$. Dann existiert $r > 0$, so dass $B_r(z_0) \subseteq f(G) \subseteq \mathbb{R}$. Dies ist ein Widerspruch, da z.B. $z_0 + \frac{r}{2}\mathrm{i} \in B_r(z_0)$, aber $z_0 + \frac{r}{2}\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$.
- Beweis direkt aus der Differenzierbarkeitseigenschaft:
Seien $z_0 \in O$ und $h \in \mathbb{R}$ so klein gewählt, dass $z_0 + h$ und $z_0 + h\mathrm{i}$ immernoch in O liegen, so ist wegen $f(O) \subset \mathbb{R}$ auch

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \in \mathbb{R}, \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{f(z_0 + h\mathrm{i}) - f(z_0)}{h\mathrm{i}} \in \mathrm{i}\mathbb{R}.$$

Der Grenzwert dieser beiden Ausdrücke für $h \to 0$ kann also nur dann existieren, wenn $f'(z_0) = 0$ für alle $z_0 \in O$ ist, f also konstant ist. Damit gibt es keine holomorphe Funktion mit $f(O) \subset \mathbb{R}$ welche nicht konstant ist.
- Beweis mit Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen:
Ist f holomorph auf O, so sind $u = \operatorname{Re} f$ und $v = \operatorname{Im} f$, aufgefasst als Funktionen $O \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ differenzierbar und erfüllen die Bedingungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Da $f(O) \subset \mathbb{R}$ ist $\partial v/\partial x = \partial v/\partial y = 0$, d.h. es ist auch $\partial u/\partial x = \partial u/\partial y = 0$ und f ist konstant. Damit gibt es keine holomorphe Funktion mit $f(O) \subset \mathbb{R}$ welche nicht konstant ist.

Aufgabe 2. (6 Punkte)
Gegeben sei die Funktion f mit

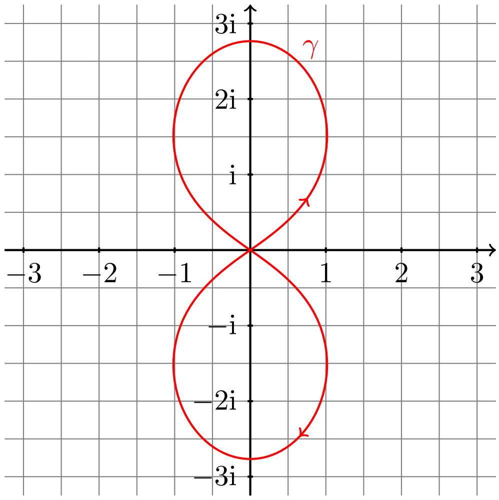
$$z \mapsto f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)\cos z}.$$

(a) Geben Sie alle Singularitäten von f an und berechnen Sie die entsprechenden Residuen.

(b) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_\gamma f(z)\, dz$$

entlang des in der folgenden Skizze gegebenen Weges γ:



Lösung 2.

(a) Es ist $(z^2+1) = (z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})$ und $\cos z = 0$ genau dann, wenn $z = z_k = (2k+1)\pi/2$. D.h. der Nenner $(z^2+1)\cos z$ hat Nullstellen bei

$$z_\pm = \pm\mathrm{i}, \qquad z_k = \tfrac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Alle Nullstellen sind einfach, d.h. f hat an diesen Stellen Pole erster Ordnung.
Die Residuen in $z_\pm$ lassen sich über die Grenzwerte berechnen, man erhält

$$\operatorname{Res}(f, z_+) = \lim_{z\to z_+}(z-z_+)f(z) = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{z-\mathrm{i}}{(z^2+1)\cos z} = \lim_{z\to\mathrm{i}} \frac{1}{(z+\mathrm{i})\cos z} = \frac{1}{2\mathrm{i}\cos i}$$

und

$$\operatorname{Res}(f, z_-) = \lim_{z\to z_-}(z-z_-)f(z) = \lim_{z\to-\mathrm{i}} \frac{z+\mathrm{i}}{(z^2+1)\cos z} = \lim_{z\to-\mathrm{i}} \frac{1}{(z-\mathrm{i})\cos z} = -\frac{1}{2\mathrm{i}\cos i}.$$

Für die Residuen in z_k, $k \in \mathbb{Z}$ schreiben wir f in der Form g/h. Nach einem Satz aus der Vorlesung sind die Residuen dann durch

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \frac{g(z_k)}{h'(z_k)}$$

gegeben. Konkret erhalten wir mit $((z^2+1)\cos z)' = 2z\cos z - (z^2+1)\sin z$ und $\sin(2k+1)\pi/2 = (-1)^k$, dass

$$\operatorname{Res}(f, z_k) = \frac{1}{2z_k\cos z_k - (z_k^2+1)\sin z_k} = \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2\pi^2/4+1}.$$

(b) Der Weg γ umläuft jediglich die beiden Singularitäten in $z_\pm$. Dabei ist zu beachten, dass z_+ in positiver und z_- in negativer Richtung umlaufen wird. Nach dem Residuensatz berechnet sich das gegebene Integral also zu

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}(f, z_+) - \operatorname{Res}(f, z_-)\right) = 2\pi\mathrm{i}\left(\frac{1}{2\mathrm{i}\cos i} + \frac{1}{2\mathrm{i}\cos i}\right) = \frac{2\pi}{\cos\mathrm{i}} = \frac{4\pi}{\mathrm{e}+1/\mathrm{e}}.$$

Aufgabe 3. (9 Punkte)

(a) Formulieren Sie den Satz von Liouville wie in der Vorlesung angegeben.

(b) Beweisen Sie den Satz von Liouville.

(c) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante, ganze Funktion. Zeigen Sie, dass es für alle $w \in \mathbb{C}$ und alle $\varepsilon > 0$ ein $z_\varepsilon \in \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$|f(z_\varepsilon) - w| < \varepsilon$$

gilt.

Lösung 3.

(a) Wir formulieren den Satz von Liouville wie in der Vorlesung angegeben:
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine auf $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion (ganze Funktion). Angenommen f ist beschränkt, so folgt, dass f konstant ist.

(b) Ist f holomorph auf $\mathbb{C}$, so lässt sich f für alle $z \in \mathbb{C}$ als Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, z^n$$

darstellen. Für die Koeffizienten gilt dabei nach Cauchy die Abschätzung

$$|a_n| \leq \frac{\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|}{r^n}$$

mit beliebigem $r > 0$. Ist $n \geq 1$, so konvergiert wegen der Beschränktheit von f die rechte Seite dieses Ausdrucks gegen Null, d.h. es ist $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, bzw.

$$f(z) = a_0$$

konstant.

(c) Wir wollen die Gegenannahme treffen und mit Hilfe des Satz von Liouville einen Widerspruch konstruieren. Wir nehmen also an, es gäbe ein $w \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$, sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ die umgekehrte Ungleichung

$$|f(z) - w| \geq \varepsilon$$

gilt. Betrachten wir nun die Funktion gegeben durch

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w},$$

so ist diese, da f holomorph ist ebenfalls holomorph und erfüllt $|g(z)| \leq 1/\varepsilon$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach dem Satz von Liouville ist g also konstant, d.h. es gibt eine Konstante $k \in \mathbb{C}$ mit $g(z) = k$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Damit ist aber

$$f(z) = \frac{1}{k} + w$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, d.h. f ist konstant im Widerspruch zu den Voraussetzungen an f.

Aufgabe 4. (8 Punkte)
Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = 2x\,\mathrm{e}^{y-x^2}, \qquad y(0) = y_0 \in \mathbb{R}.$$

(a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems.

(b) Geben Sie das maximale Existenzintervall der Lösung in Abhängigkeit von $y_0 \in \mathbb{R}$ an.

(c) Die Differentialgleichung in obigem Anfangswertproblem besitzt die Form

$$y' = f(x, y)$$

mit einer stetigen Fuktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Welche zusätzliche Voraussetzung muss f erfüllen, damit für das Anfangswertproblem in jedem Quadrat

$$\mathcal{Q} := [-1, 1] \times [y_0 - 1, y_0 + 1]$$

der Satz von Picard-Lindelöf anwendbar ist?
Prüfen Sie diese Voraussetzung für das gegebene Anfangswertproblem.

Lösung 4.

(a) Wir lösen die Differentialgleichung mit Hilfe des Separationsansatzes, es ist

$$\begin{aligned} y' = 2x\,\mathrm{e}^{y-x^2} \qquad &\Leftrightarrow \qquad y'\,\mathrm{e}^{-y} = 2x\,\mathrm{e}^{-x^2} \\ &\Leftrightarrow \qquad -\mathrm{e}^{-y(x)} = \int \mathrm{e}^{-y}\,y' dx = \int 2x\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = -\mathrm{e}^{-x^2} - c \end{aligned}$$

und damit

$$\mathrm{e}^{-y(x)} = \mathrm{e}^{-x^2} + c. \tag{1}$$

Einsetzen der Anfangsbedingung $y(0) = y_0$ führt auf

$$\mathrm{e}^{-y_0} = \mathrm{e}^{-y(0)} = 1 + c \qquad \Leftrightarrow \qquad c = \mathrm{e}^{-y_0} - 1.$$

Dies eingesetzt in (1) liefert für die allgemeine Lösung

$$\mathrm{e}^{-y(x)} = \mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-y_0} - 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad y(x) = -\ln\left(\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-y_0} - 1\right),$$

falls $\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-y_0} - 1 > 0$.

(b) Wie bereits gesagt exisitert die Lösung für alle $x \in \mathbb{R}$ für die eine der Gleichungen

$$\mathrm{e}^{-x^2} + \mathrm{e}^{-y_0} - 1 > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{-x^2} > 1 - \mathrm{e}^{-y_0}$$

erfüllt ist.

- Sei zunächst $y_0 \leq 0$, dann ist

$$1 - \mathrm{e}^{-y_0} \leq 0 < \mathrm{e}^{-x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und die Lösung exisitiert auf ganz $\mathbb{R}$.

- Sei nun $y_0 > 0$, dann ist $1 > 1 - \mathrm{e}^{-y_0} > 0$ und damit

$$\mathrm{e}^{-x^2} > 1 - \mathrm{e}^{-y_0} \qquad \Leftrightarrow \qquad |x| < \sqrt{-\ln\left(1 - \mathrm{e}^{-y_0}\right)} =: c.$$

Die Lösung existiert also für alle $x \in]-c, c[$.

(c) Der Satz von Picard-Lindelöf ist anwendbar, sofern f auf $\mathcal{Q}$ die Lipschitzbedingung

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| \leq L \cdot |y - \tilde{y}|.$$

mit einer Konstanten $L > 0$ erfüllt. Diese wollen wir nun prüfen. Seien hierfür $(x,y), (x,\tilde{y}) \in \mathcal{Q}$, dann ist

$$|f(x,y) - f(x,\tilde{y})| = |2x\,\mathrm{e}^{-x^2}| \cdot |\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{\tilde{y}}| \leq \underbrace{2(|x_0|+1)\,\mathrm{e}^{y_0+1}}_{=:L}|y - y_0|,$$

da $|2x\,\mathrm{e}^{-x^2}| \leq 2(|x_0|+1)\mathrm{e}^0 = 2(|x_0|+1)$ und nach Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$|\mathrm{e}^{y} - \mathrm{e}^{\tilde{y}}| \leq |y - \tilde{y}| \cdot \max_{\eta \in [y_0-1, y_0+1]} \mathrm{e}^{\eta} = |y - \tilde{y}| \cdot \mathrm{e}^{y_0+1}.$$

Aufgabe 5. (9 Punkte)
Gegeben sei das Vektorfeld

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x(\cos y)^2 \\ y - (\sin y)(\cos y) \\ z + x^2 + y^2 \end{pmatrix}.$$

Desweiteren betrachten wir die Flächen

$$F_1 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 0\},$$
$$F_2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0\}.$$

(a) Skizzieren Sie beide Flächen.

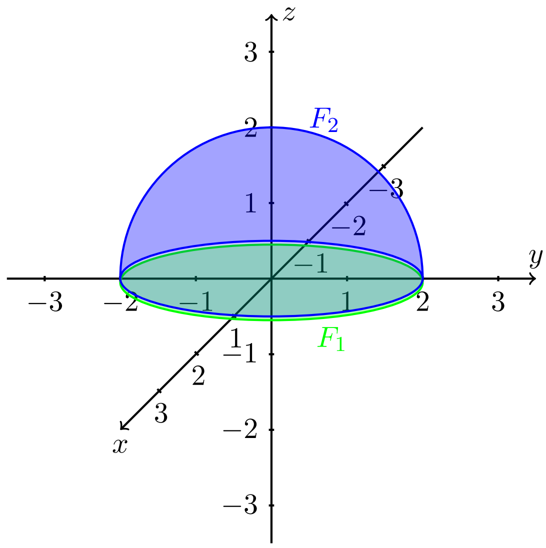
(b) Bestimmen Sie die drei Integrale

$$\text{(i)} \int_{F_1} A \cdot n \, d\sigma, \qquad \text{(ii)} \int_V \operatorname{div} A \, dx, \qquad \text{(iii)} \int_{F_2} A \cdot n \, d\sigma.$$

In (ii) sei V das von den beiden Flächen eingeschlossene Volumen, in (i) und (iii) seinen die Normalenvektoren n jeweils so orientiert, dass sie bzgl. V nach außen zeigen.

Lösung 5.

(a) Skizze:



(b) (i) Eine Parametrisierung der Fläche ist gegeben durch

$$f : [0,2] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für den Normalenvektor erhalten wir

$$\partial_r f = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \partial_\varphi f = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{also} \qquad \tilde{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Bzgl. des Volumens V soll dieser aber nach außen orientiert sein, d.h. wir müssen

$$n = -\tilde{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix}$$

verwenden. Im Integranden $A \cdot n$ tritt also nur die dritte Komponente von A auf. Setzen wir die Parametrisierung ein, so erhalten wir für das gesuchte Integral

$$\int_{F_1} A \cdot n \, d\sigma = -\int_0^2 \int_0^{2\pi} r(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)\, d\varphi\, dr = -2\pi \int_0^2 r^3\, dr = -8\pi$$

(ii) Wir berechnen zunächst $\operatorname{div} A$ und erhalten

$$\operatorname{div} A = 2\cos^2 y + 1 - \cos^2 y + \sin^2 y + 1 = 3.$$

Damit ist

$$\int_V \operatorname{div} A\, dx = 3 \cdot \operatorname{Vol}(V) = 3 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot 8 = 16\pi.$$

(iii) Das letzte Integral lässt sich mit Hilfe des Satz von Gauß-Ostrogradski berechnen: Das Vektorfeld A ist auf dem ganzen $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar, V ist kompakt mit stückweise glattem Rand, d.h. wir können den Satz tatsächlich anwenden und erhalten

$$16\pi = \int_V \operatorname{div} A\, dx = \int_{F_1} A \cdot n\, d\sigma + \int_{F_2} A \cdot n\, d\sigma = -8\pi + \int_{F_2} A \cdot n\, d\sigma$$

bzw.

$$\int_{F_2} A \cdot n \, d\sigma = 24\pi.$$