Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis III (WS 2015/16) — Scheinklausur 1

Termin:	*16.01.2016*
Hinweise:	*Abgaben mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.* *Bei den* **Aufgaben 7,8 und 9** *sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung pro Aufgabe jeweils ein Extrablatt.* *Bei den übrigen Aufgaben wird nur die Abgabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.* *Am Ende der Klausur bitte alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**Keine** *außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.*
Bearbeitungszeit:	*90 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**	**Gruppen-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**
A7	**A8**	**A9**	**A10**	**A11**	Σ

Aufgabe 1 (6 Punkte) Formulieren Sie drei **verschiedene** Kriterien, welche sicherstellen, dass eine Funktion $f : O \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $O \subset \mathbb{C}$ holomorph ist:

Kriterium 1:

Kriterium 2:

Kriterium 3:

Aufgabe 2 (2 Punkte) Formulieren Sie Voraussetzung und Aussage des Satz von Liouville aus der Vorlesung:

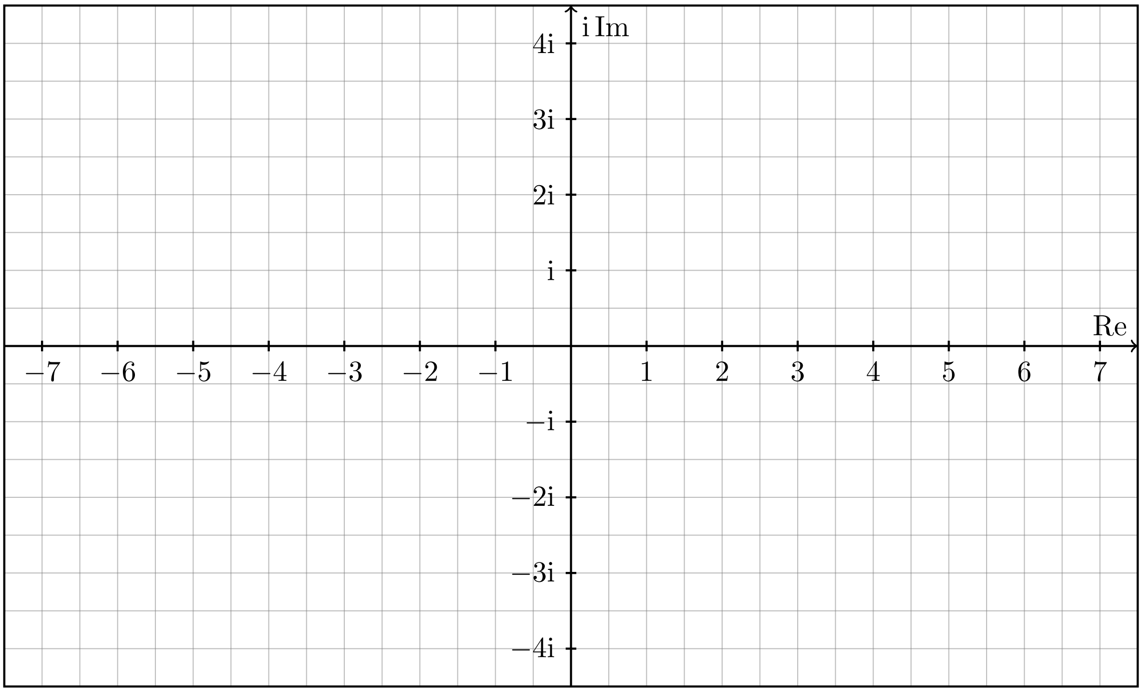
Aufgabe 3 (3 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(z) = \frac{\cos z}{z} + \frac{1}{z^2 - 2(1+\mathrm{i})z + 4\mathrm{i}}.$$

Skizzieren Sie die Konvergenzkreise bei Potenzreihenentwicklung von f in den Punkten

(a) $z_1 = 1$, **(b)** $z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$, **(c)** $z_3 = 1 - 2\mathrm{i}$.

in das untenstehende Koordinatensystem:



Aufgabe 4 (3 Punkte) In dieser Aufgabe sind alle Ergebnisse in der Form $x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ anzugeben.

(a) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_\Gamma \operatorname{Re} z \, dz = \boxed{}$$

wobei $\Gamma = \{t^2 - \mathrm{i}t : t \in [0,1]\}$.

(b) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{[0,1+\mathrm{i}]} z^3 \, dz = \boxed{}$$

(c) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin z} \, dz = \boxed{}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte) Die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ haben in $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität. Geben Sie jeweils die Art dieser Singularität an. Im Fall einer Polstelle geben Sie zusätzlich die Ordnung des Pols an.

$f(z)$	Art der Singularität und ggf. Ordnung des Pols:
$\cos(z) + \cos\left(\frac{1}{z}\right)$	
$\frac{\sin(z^2) - z^2}{z^4}$	
$\frac{\cos(z) - 1}{z^4}$	

Aufgabe 6 (2 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^3}.$$

Geben Sie die Laurent-Entwicklung von f um $z_0 = 0$ mit ihrem Konvergenzbereich an:

Laurentreihe:

Konvergenzbereich:

Aufgabe 7 (2 Punkte) Sei $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf der offenen Einheitskreisscheibe $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : B_1(0) \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

ebenfalls holomorph ist.

Aufgabe 8 (3 Punkte) Sei $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $B_1(0)\setminus\{0\}$, welche für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert. Gibt es eine holomorphe Funktion $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ für die

$$f(z_n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ z_n & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

gilt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 9 (7 Punkte) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4}\, dx$$

mit Hilfe des Residuensatzes. Achten Sie dabei auf vollständige Begründungen.

Aufgabe 10 (6 Punkte) Geben Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an:

$y' = y \cdot \cos x$	
$y' = 2(y-3)$	
$1 + 2xy + (x^2+1)\, y' = 0$	

Aufgabe 11 (5 Punkte) Gegeben ist das Anfangswertproblem $y'(x) = A \cdot y(x)$ für $y(0) = y_0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Eigenwerte von A an:

$\lambda_1 = \boxed{}$ $\quad \lambda_2 = \boxed{}$ $\quad \lambda_3 = \boxed{}$

(b) Geben Sie ein Fundamentalsystem des homogenen Problems an, welches nur aus reellwertigen Funktionen besteht:

$y_1(x) = \boxed{}$ $\quad y_2(x) = \boxed{}$ $\quad y_3(x) = \boxed{}$

(c) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems an:

$y(x) = \boxed{}$