Analysis III (WS 2015/16) — Scheinklausur 1

Termin:	*16.01.2016*
Hinweise:	*Abgaben mit Bleistift oder Rotstift werden nicht gewertet.* *Bei den* ***Aufgaben 7,8 und 9*** *sind die vollständigen Argumentationsschritte anzugeben. Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung pro Aufgabe jeweils ein Extrablatt.* *Bei den übrigen Aufgaben wird nur die Abgabe von Endergebnissen verlangt. Nebenrechnungen werden nicht gewertet und daher auch nicht eingesammelt.* *Am Ende der Klausur bitte alle Lösungsblätter in das Umschlagblatt einlegen.*
Hilfsmittel:	**Keine** *außer Schreibutensilien und leerem Papier. Insbesondere sind Taschenrechner, Handys, Computer und Formelsammlungen nicht erlaubt.*
Bearbeitungszeit:	*90 min*

Name:	**Matrikel-Nr.:**	**Gruppen-Nr.:**

Punkte:

A1	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**

A7	**A8**	**A9**	**A10**	**A11**	Σ

Aufgabe 1 (6 Punkte) Formulieren Sie drei **verschiedene** Kriterien, welche sicherstellen, dass eine Funktion $f : O \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $O \subset \mathbb{C}$ holomorph ist:

Lösung 1.
Denkbare Kriterien sind z.B.:

- f ist holomorph, falls f in allen Punkten $z_0 \in O$ differenzierbar ist, für alle $z_0 \in O$ also der Grenzwert
$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$
existiert.
- f ist holomorph, falls f unendlich oft auf O differenzierbar ist.
- f ist holomorph, wenn Real- und Imaginärteil die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf O erfüllen. Schreibt man f in der Form $f(x+iy) = u(x, y)+iv(x, y)$ mit $u, v \in C^1(O, \mathbb{R})$, so ist f holomorph, falls u und v die beiden Gleichungen
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$
erfüllen.
- f ist holomorph, wenn f in allen Punkten $z_0 \in O$ lokal als Potenzreihe darstellbar ist, d.h. wenn es für alle $z_0 \in O$ ein $r > 0$ gibt, sodass
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$
für alle $z \in B_r(z_0)$ gilt.
- Holomorphie von f folgt aus dem Satz von Morera: f ist holomorph, wenn das Integral
$$\int_{\partial D} f(z)\, dz$$
entlang des Randes aller möglicher abgeschlossener Dreiecksflächen $D \subset O$ verschwindet.
- f ist holomorph, wenn f lokal eine Stammfunktion besitzt, d.h. falls es für alle $z_0 \in O$ ein $r > 0$ gibt, sodass f auf $B_r(z_0)$ eine Stammfunktion besitzt.
- f ist holomorph, wenn das Integral
$$\int_{\gamma} f(z)\, dz$$
über alle geschlossenen, nullhomotopen Wege $\gamma \subset O$ verschwindet.
- f ist holomorph, falls für alle zueinander homotopen Wege γ_1, γ_2 das Integeral entlang dieses Weges gleich ist, d.h.
$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz$$
gilt.

Korrekturanmerkung: Jedes richtige, vollständig formulierte Kriterium gibt zwei Punkte.

Aufgabe 2 (2 Punkte) Formulieren Sie Voraussetzung und Aussage des Satz von Liouville aus der Vorlesung:

Angenommen eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist beschränkt, so folgt, dass f konstant ist.

1+1

Korrekturanmerkung: Voraussetzung und Aussage geben jeweils einen Punkt.

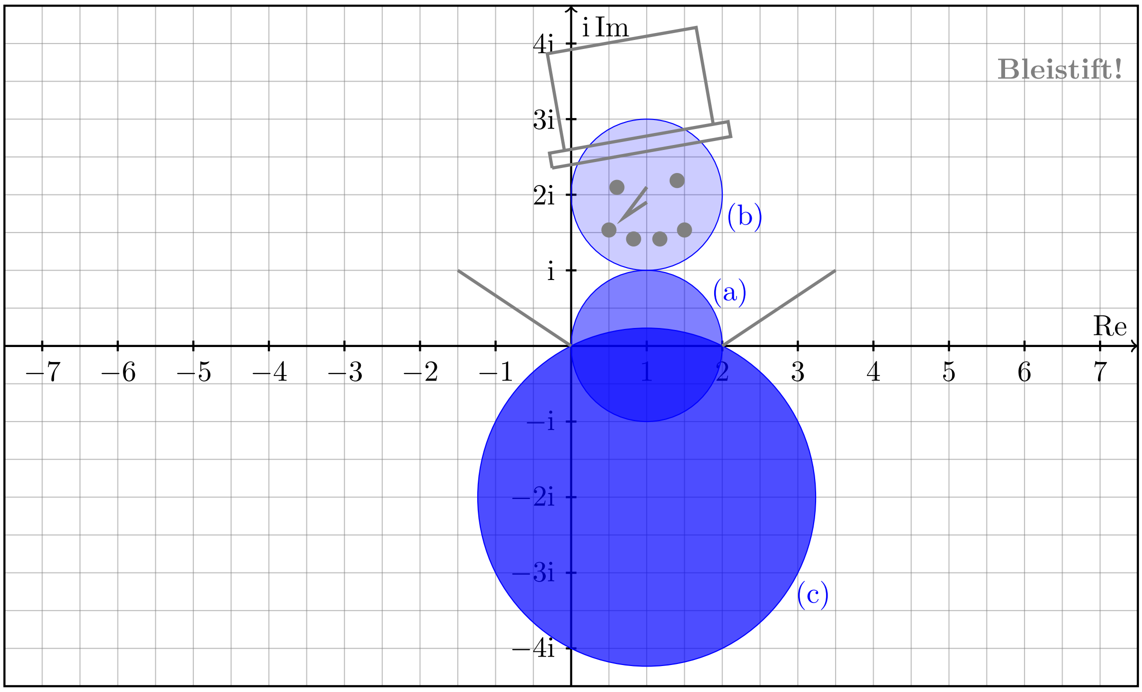
Aufgabe 3 (3 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(z) = \frac{\cos z}{z} + \frac{1}{z^2 - 2(1+\mathrm{i})z + 4\mathrm{i}}.$$

Skizzieren Sie die Konvergenzkreise bei Potenzreihenentwicklung von f in den Punkten

(a) $z_1 = 1$, **(b)** $z_2 = 1 + 2\mathrm{i}$, **(c)** $z_3 = 1 - 2\mathrm{i}$.

in das untenstehende Koordinatensystem:



3 · 1

Korrekturanmerkung: Jeder korrekt gezeichnete Kreis gibt einen Punkt.

Aufgabe 4 (3 Punkte) In dieser Aufgabe sind alle Ergebnisse in der Form $x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ anzugeben.

(a) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_\Gamma \operatorname{Re} z \, dz = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{\mathrm{i}}{3}}$$ 1

wobei $\Gamma = \{t^2 - \mathrm{i}t \, : \, t \in [0,1]\}$.

(b) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{[0,1+\mathrm{i}]} z^3 \, dz = \boxed{-1}$$ 1

(c) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\sin z} \, dz = \boxed{2\pi\mathrm{i}}$$ 1

Aufgabe 5 (4 Punkte) Die folgenden Funktionen $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ haben in $z_0 = 0$ eine isolierte Singularität. Geben Sie jeweils die Art dieser Singularität an. Im Fall einer Polstelle geben Sie zusätzlich die Ordnung des Pols an.

$f(z)$	Art der Singularität und ggf. Ordnung des Pols:	
$\cos(z) + \cos\left(\frac{1}{z}\right)$	$z_0 = 0$ ist eine wesentliche Singularität	1
$\frac{\sin(z^2) - z^2}{z^4}$	f ist in $z_0 = 0$ holomorph fortsetzbar, bzw. die Singulartät ist hebbar	1
$\frac{\cos(z) - 1}{z^4}$	$z_0 = 0$ ist ein Pol zweiter Ordnung	2

Aufgabe 6 (2 Punkte) Gegeben ist die Funktion

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^z - 1}{z^3}.$$

Geben Sie die Laurent-Entwicklung von f um $z_0 = 0$ mit ihrem Konvergenzbereich an:

Laurentreihe:

$$\sum_{n=-2}^{\infty} \frac{z^n}{(n+3)!}$$ 1

Konvergenzbereich:

$$\mathbb{C} \setminus \{0\}$$ 1

Aufgabe 7 (2 Punkte) Sei $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion auf der offenen Einheitskreisscheibe $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g : B_1(0) \to \mathbb{C}, \qquad z \mapsto g(z) = \overline{f(\overline{z})}$$

ebenfalls holomorph ist.

Lösung 7.
Zunächst bemerken wir, dass $|\overline{z}| = |z|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und daher $\overline{B_1(0)} = B_1(0)$ gilt. Die Funktion g ist also tatsächlich wohldefiniert.
Da f holomorph auf $B_1(0)$ ist, ist f in allen Punkten $z_0 \in B_1(0)$ als Potenzreihe darstellbar, d.h. es ist 1

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z - z_0)^n$$

für alle $z_0 \in B_1(0)$ und z aus einer kleinen Umgebung von z_0. Damit erhalten wir, dass

$$g(z) = \overline{f(\overline{z})} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (\overline{z} - z_0)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{a_n} \, (z - \overline{z_0})^n, \qquad 1$$

d.h. $\overline{a_n}$ sind die Koeffizienten einer Potenzreihendarstellung von g in $\overline{z_0}$ und g ist ebenfalls in allen Punkten aus $B_1(0)$ als Potenzreihe darstellbar, also holomorph.
Alternativ können wir zeigen, dass g in allen Punkten $z_0 \in B_1(0)$ differenzierbar ist. Hierfür bemerken wir, dass 1

$$\lim_{z \to z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{f(\overline{z})} - \overline{f(\overline{z_0})}}{z - z_0} = \overline{\lim_{z \to z_0} \frac{f(\overline{z}) - f(\overline{z_0})}{\overline{z} - \overline{z_0}}} = \overline{f'(\overline{z_0})}. \qquad 1$$

Im letzten Schritt haben wir dabei verwendet, dass f holomorph und dabei in allen $z_0 \in B_1(0)$ differenzierbar ist.

Aufgabe 8 (3 Punkte) Sei $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene Einheitskreisscheibe und $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $B_1(0)\setminus\{0\}$, welche für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert. Gibt es eine holomorphe Funktion $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ für die

$$f(z_n) = \begin{cases} 0 & \text{für } n \text{ ungerade,} \\ z_n & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$$

gilt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung 8.
Wir zeigen, dass es keine solche holomorphe Funktion $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ geben kann:
Angenommen f wäre holomorph, dann gilt einerseits, dass $f(z) = 0$ für alle

$$z \in \{z_{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Da $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert und nicht konstant ist besitzt diese Menge einen Häufungspunkt in $B_1(0)$ und es folgt nach dem Identitätssatz, dass $f(z) = 0$ für alle $z \in B_1(0)$. Entsprechend ist aber auch $f(z) = z$ auf der Menge 2

$$\{z_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$$

und es folgt nach dem Identitätssatz, dass $f(z) = z$ auf $B_1(0)$ gilt. Beide Aussagen stehen aber offensichtlich im Widerspruch zueinander, f kann also nicht holomorph sein. 1

Alternativ kann man mit Hilfe der Ableitung in $z_0 = 0$ argumentieren: Angenommen f wäre holomorph auf $B_1(0)$, dann würde die Ableitung

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z}$$

existieren (aus Stetigkeitsgründen wäre $f(0) = 0$). Setzen wir nun aber die Teilfolgen $(z_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(z_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ in den Differenzenquotienten ein, so erhalten wir, dass

$$\frac{f(z_{2n})}{z_{2n}} = \frac{z_{2n}}{z_{2n}} = 1, \qquad \frac{f(z_{2n+1})}{z_{2n+1}} = \frac{0}{z_{2n+1}} = 0.$$

Obiger Grenzwert kann also nicht existieren. 3

Korrekturanmerkung:

- **Fall die Frage nach Existenz oder nicht Existenz richtig beantwortet wurde, die Begründung aber falsch oder nicht vorhanden war, wurden $0,5$ Punkte vergeben.**
- **Falls bemerkt wurde, dass die Aussage aus dem Identitätssatz folgt und dieser richtig wiedergegeben wurde, wurde 1 Punkt vergeben.**

Aufgabe 9 (7 Punkte) Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\,dx$$

mit Hilfe des Residuensatzes. Achten Sie dabei auf vollständige Begründungen.

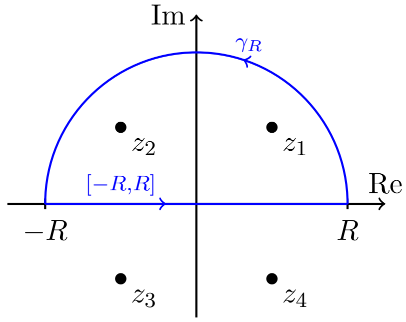
Lösung 9.

- Um das gegebene Integral zu berechnen wählen wir die meromorphe Funktion

$$f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$$

0,5

und integrieren diese entlang des Weges $\gamma = \gamma_R \cup [-R, R]$ in folgender Skizze:



0,5

- Wegen

$$1 + z^4 = (z_1 - z)\cdot(z_2 - z)\cdot(z_3 - z)\cdot(z_4 - z)$$

mit

$$z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n-1)\pi/4}, \qquad n = 1, 2, 3, 4$$

1

und $z_n^2 \neq 0$ besitzt f in den Punkten z_n jeweils eine Polstelle erster Ordnung. Da $f = g/h$ lassen sich die Residuen in diesen Polen mit Hilfe von

$$\operatorname{Res}(f, z_n) = \frac{g(z_n)}{h'(z_n)} = \frac{z_n^2}{4z_n^3} = \frac{1}{4z_n}$$

berechnen. Da nur die Pole z_1 und z_2 vom Integrationsweg umlaufen werden genügt es nur die Residuen bei z_1 und z_2 anzugeben, wir erhalten

$$\operatorname{Res}(f, z_1) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}, \qquad \operatorname{Res}(f, z_2) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4}.$$

0,5+0,5

In einer kurzen Nebenrechnung berechnen wir

$$\frac{1}{4}\left(\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2)\right) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}3\pi/4}\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}\right) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2}}.$$

Damit folgt nach dem Residuensatz für das Integral von f entlang des Weges γ, dass

$$\int_\gamma \frac{z^2}{1+z^4}\,dz = 2\pi\mathrm{i}\left(\operatorname{Res}(f, z_1) + \operatorname{Res}(f, z_2)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

1

- Wir üblich zeigen wir, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4}\, dz = 0.$$

Für γ_R wählen wir die Parametrisierung

$$\gamma_R : [0,\pi] \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto R \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}t},$$

eingesetzt in das Integral liefert dies (für $R > 1$)

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4}\, dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{R^2 \mathrm{e}^{2\mathrm{i}t}}{1+R^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}}\, \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\, dt \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{R^3}{1+R^4\mathrm{e}^{4\mathrm{i}t}} \right| dt \leq \frac{R^3\pi}{R^4-1} \qquad 1$$

wobei die rechte Seite für $R \to \infty$ gegen Null konvergiert.

- Wegen

$$\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{x^2}{x^4} = \frac{1}{x^2}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und der Konvergenz des uneigentlichen Integrals $\int_{-\infty}^{\infty} 1/x^2\, dx$ konvergiert auch das gegebene Integral und es gilt, dass

$$\lim_{R\to\infty} \int_{[-R,R]} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx. \qquad 1$$

- Zusammenfassend folgt aus den vorangegangenen Schritten, dass

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \int_{\gamma_R \cup [-R,R]} \frac{z^2}{1+z^4}\, dz = \int_{\gamma_R} \frac{z^2}{1+z^4}\, dz + \int_{[-R,R]} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0 + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx$$

und damit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \qquad 1$$

Aufgabe 10 (6 Punkte) Geben Sie alle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen an:

$y' = y \cdot \cos x$	$y(x) = c \cdot \mathrm{e}^{\sin x}, \quad c \in \mathbb{R}$	2
$y' = 2(y-3)$	$y(x) = 3 + c \cdot \mathrm{e}^{2x}, \quad c \in \mathbb{R}$	2
$1 + 2xy + (x^2+1)\, y' = 0$	$y(x) = \dfrac{c-x}{x^2+1}, \quad c \in \mathbb{R}$	2

Korrekturanmerkung:

- **Folgefehler hinsichtlich der Konstanten wurden berücksichtigt.**
- **In der ersten Zeile ergab die Lösung $y(x) = \mathrm{e}^{\sin x + c}$ noch einen Punkt.**

Aufgabe 11 (5 Punkte) Gegeben ist das Anfangswertproblem $y'(x) = A \cdot y(x)$ für $y(0) = y_0$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die Eigenwerte von A an:

$$\lambda_1 = \boxed{\mathrm{i}} \qquad \lambda_2 = \boxed{-\mathrm{i}} \qquad \lambda_3 = \boxed{2}$$

1

(b) Geben Sie ein Fundamentalsystem des homogenen Problems an, welches nur aus reellwertigen Funktionen besteht:

$$y_1(x) = \boxed{\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad y_2(x) = \boxed{\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \\ 0 \end{pmatrix}} \qquad y_3(x) = \boxed{\mathrm{e}^{2x}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

3 · 1

(c) Geben Sie die Lösung des Anfangswertproblems an:

$$y(x) = \boxed{\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \\ 2\mathrm{e}^{2x} \end{pmatrix}}$$

1