Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 1

Es ist unglaublich, wie unwissend die studierende Jugend auf Universitäten kommt, wenn ich nur 10 Minuten rechne oder geometrisiere, so schläft 1/4 derselben sanft ein.
(Georg Christoph Lichtenberg; 1742 - 1799)

Für einige Anwendungen ist es zweckmäßig die komplexe Ebene um einen zusätzlichen Fernpunkt "∞" zu erweitern. D.h. wir setzen $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und treffen folgende Konventionen:

$$z \pm \infty = \pm\infty + z = \infty, \qquad z/\infty = 0$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, sowie

$$z \cdot \infty = \infty \cdot z = \infty, \qquad z/0 = \infty$$

für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und

$$\infty + \infty = \infty \cdot \infty = \infty, \qquad \overline{\infty} = \infty.$$

Wir bezeichnen $\hat{\mathbb{C}}$ als *Riemannsche Zahlenkugel*. Man beachte, dass die Ausdrücke $\infty - \infty$ und ∞/∞ undefiniert bleiben. Im Folgenden betrachten wir Abbildungen der Form

$$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \qquad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $ad - bc \neq 0$. Solche Abbildungen bezeichnen wir als *gebrochen linear*.

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

1.1. **(a)** Beschreiben Sie die Wirkung der Abbildung

$$f_1 : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \qquad z \mapsto az + b$$

mit $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ geometrisch. D.h. ist ein $z \in \mathbb{C}$ gegeben, wie lässt sich das Bild $f_1(z)$ konstruieren?

(b) Beantworten Sie die gleiche Frage für die Abbildung

$$f_2 : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \qquad z \mapsto \frac{1}{z}.$$

Skizzieren Sie zudem die Kurvenschaaren

$$M_\lambda := \{f_2(z) \,:\, \operatorname{Re} z = \lambda\}, \qquad N_\mu := \{f_2(z) \,:\, \operatorname{Im} z = \mu\}$$

für exemplarisch gewählte $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(c) Zeigen Sie, dass jede gebrochen lineare Funktion eine Komposition von Abbildungen der Form f_1 und f_2 ist.

1.2. **(a)** Zeigen Sie, dass Geraden und Kreise genau diejenige Punktmengen sind, welche eine Gleichung der Form

$$Az\overline{z} + Bz + \overline{B}\overline{z} + C = 0$$

mit $A, C \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{C}$ und $AC < |B|^2$ erfüllen.
Wie muss A dabei gewählt werden, damit man eine Gerade erhält?

(b) Für den Rest des Semesters werden wir nicht mehr explizit zwischen Kreisen und Geraden unterscheiden und einfach von Kreisen sprechen. Zeigen Sie, dass in diesem Sinne jede gebrochen lineare Funktion Kreise auf Kreise abbildet.

Votieraufgaben

1.3. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass alle gebrochen linearen Transformationen eindeutig durch die Angabe der Bilder dreier Punkte aus $\hat{\mathbb{C}}$ bestimmt werden.

(a) Zeigen Sie, dass die gebrochen lineare Transformation, welche ein gegebenes Tripel (z_1, z_2, z_3) mit $z_1, z_2, z_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ auf das Tripel $(0, 1, \infty)$ abbildet, eindeutig durch

$$z \mapsto \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} \frac{z - z_1}{z - z_3}$$

gegeben ist.

(b) Finden Sie diejenige Transformation, welche das Tripel $(0, 1, \infty)$ auf (w_1, w_2, w_3) mit $w_1, w_2, w_3 \in \hat{\mathbb{C}}$ abbildet. Die Komposition beider Abbildungen ist dann die eindeutige Transformation, welche (z_1, z_2, z_3) auf (w_1, w_2, w_3) abbildet.

1.4. Wie wir in Kürze zeigen werden, sind alle gebrochen linearen Transformationen winkelerhaltend in dem Sinne, dass der orientierte Schnittwinkel zweier Kurven γ_1 und γ_2 im Bild erhalten bleibt, die beiden Kurven $f(\gamma_1)$ und $f(\gamma_2)$ sich also unter demselben Winkel schneiden. Aus dieser Tatsache folgt, dass das Innere eines Kreises auf den Innenbereich des zugehörigen Kreises im Bild und der Außenbereich auf den Außenbereich abgebildet wird (Warum eigentlich?). Halbebenen sind in unserem Sinne natürlich auch Kreisflächen, da sie von einem Kreis (bzw. einer Geraden) begrenzt werden.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \qquad z \mapsto \frac{z+1}{\mathrm{i}z - \mathrm{i}}$$

das Innere der Einheitskreisscheibe mit Mittelpunkt im Ursprung auf die obere Halbebene abbildet.

(b) Überlegen Sie, welche Bedingung die Koeffizienten $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ einer Abbildung der Form

$$f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}, \qquad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

erfüllen müssen, damit die obere Halbebene auf sich abgebildet wird.

(c) Finden Sie alle gebrochen linearen Transformationen welche die Einheitskreisscheibe auf die obere Halbebene abbilden.
Finden Sie desweiteren alle gebrochen lineare Transformationen welche die Einheitskreisscheibe um den Ursprung auf sich abbilden.
(*Hinweis:* Verwenden Sie eine Folgerung aus der Zusatzaufgabe.)

Zusatzaufgaben

1.5. Bezeichne $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ die Menge der invertierbaren 2×2-Matrizen mit komplexen Einträgen. Zeigen Sie, dass durch

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \frac{az+b}{cz+d}$$

ein Homomorphismus zwischen $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ und der Menge aller gebrochen linearen Funktionen gegeben ist.