# Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 2

*Technical skill is mastery of complexity while creativity is mastery of simplicity.*
*(Erik Christopher Zeeman; * 1925)*

### Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

**2.1.** In der Vorlesung wurden die Exponential-, Kosinus- und Sinusfunktion mit Hilfe von Reihen definiert. Konkret ist

$$\mathrm{e}^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \qquad \cos z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \qquad \sin z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}.$$

für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

**(a)** $\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i} \sin z$,

**(b)** $\mathrm{e}^{z+w} = \mathrm{e}^z \cdot \mathrm{e}^w$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt. Verwenden Sie diese beiden Ausdrücke, um zu zeigen, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ auch

**(c)** $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z} \cdot (\cos(\operatorname{Im} z) + \mathrm{i} \sin(\operatorname{Im} z))$,

**(d)** $\cos z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$ bzw. $\sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}\right)$,

**(e)** $(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1$

gelten. Zeigen Sie ferner, dass

**(f)** Kosinus und Sinus nur reelle Nullstellen haben und

**(g)** $\lim_{y \to \pm\infty} |\cos(x + \mathrm{i}y)| = \infty$, bzw. $\lim_{y \to \pm\infty} |\sin(x + \mathrm{i}y)| = \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**2.2.** Welche der folgenden Funktionen $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind in $z = 0$ differenzierbar?

**(a)** $z \mapsto \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z$, **(b)** $z \mapsto \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z$, **(c)** $z \mapsto \overline{z}$, **(d)** $z \mapsto z\overline{z}$.

Verwenden Sie für Ihre Bearbeitung nur die Definition der Differenzierbarkeit.

## Votieraufgaben

**2.3.** In Analysis II haben wir gezeigt, dass

$$\ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (x-1)^n$$

für alle $x \in [0,2[$ gilt. Diese Reihendarstellung wollen wir nun nutzen um eine komplexwertige Funktion zu definieren, wir setzen

$$f(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n.$$

**(a)** Berechnen Sie den Konvergenzkreis der gegebenen Reihe.

**(b)** Zeigen Sie, dass im Inneren dieses Konvergenzkreises $f'(z) = 1/z$ gilt.

**(c)** Vergleichen Sie dies mit den Aussagen zur Stammfunktion von $1/z$ aus der Vorlesung.

**2.4.** Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos\theta + r^2}\, d\theta = 1$$

für alle $0 \leq r < R$.
(*Hinweis:* Integrieren Sie $(R+z)/(z(R-z))$ über einen geeignete Kurve.)

## Zusatzaufgaben

**2.5.** **(a)** Wir betrachten die Glieder der Exponentialreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

und fixieren ein $n \in \mathbb{N}$. Für welche $z \in \mathbb{C}$ ist der Betrag des $n$-ten Gliedes $z^n/n!$ größer als die Beträge aller anderen Glieder?

**(b)** Beantworten Sie die gleiche Frage für die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{z}{n} = 1 + z + \frac{z(z-1)}{2} + \cdots + \frac{z(z-1)(z-2)\ldots(z-(n-1))}{n!} + \cdots.$$