

## Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 25

Wie im vorherigen Semester finden Sie nachfolgend eine Zusammenstellung einfacher Aufwärm-  
aufgaben zu Integralen entlang von Wegen in der komplexen Ebene. Anhand dieser können Sie die  
Definition des Wegintegrals, sowie einfache Rechentechniken üben. Die Aufgaben werden **nicht** in  
den Übungen besprochen und gehören **nicht** zu den Scheinkriterien.

**25.1.** Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_{\gamma} f(z) dz,$$

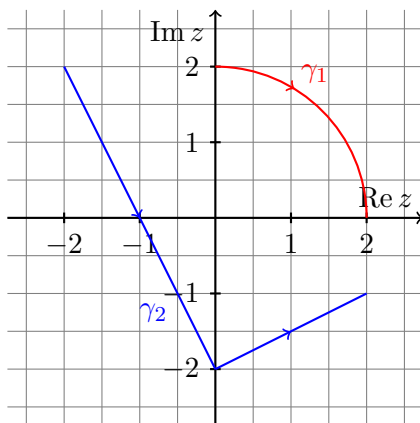
wenn

- (a)  $f(z) = z^2$  und  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ ,
- (b)  $f(z) = \operatorname{Re} z$  und  $\gamma(t) = t + it^2$ ,  $t \in [0, 1]$ ,
- (c)  $f(z) = 1/z$  und  $\gamma(t) = e^{-it}$ ,  $t \in [0, 8\pi]$ ,
- (d)  $f(z) = e^z$  und  $\gamma$  der Polygonzug durch die Punkte 1,  $1 + i$  und  $i$  ist,
- (e)  $f(z) = |z|^4$  und  $\gamma$  der direkte Weg von  $-1$  nach  $1 + i$  ist.

**25.2.** Integrieren Sie die Funktionen

- (a)  $z \mapsto z^2$ ,      (b)  $z \mapsto \operatorname{Re} z$ ,      (c)  $z \mapsto e^z$ ,      (d)  $z \mapsto 1/z$

entlang der skizzierten Wege:



**25.3.** Für  $r > 0$  und  $z_0 \in \mathbb{C}$  bezeichne

$$K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}.$$

den Kreis um  $z_0$  mit Radius  $r$ . Berechnen Sie den Wert der Integrale

- (a)  $\int_{K_{1/2}(0)} \frac{dz}{z^2 + 1}$ ,    (b)  $\int_{K_{1/2}(i)} \frac{dz}{z^2 + 1}$ ,    (c)  $\int_{K_{1/2}(-i)} \frac{dz}{z^2 + 1}$ ,    (d)  $\int_{K_3(0)} \frac{dz}{z^2 + 1}$ .

**25.4.** Seien  $R > 0$  und  $n \in \mathbb{Z}$ . Berechnen Sie

$$\int_{\gamma} z^n dz,$$

entlang des durch  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}, t \mapsto R \cdot e^{it}$ . parametrisierten Weges. In welchen Fällen kann das Integral mit Hilfe einer Stammfunktion berechnet werden?