Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 3

Hofstadter's Law: It always takes longer than you expect,
even when you take into account Hofstadter's Law.
(Douglas R. Hofstadter in Gödel, Escher, Bach; 1979)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

3.1. Eine Funktion f sei durch ihre Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

mit Koeffizienten $a_n \in \mathbb{C}$ und Konvergenzradius $R > 0$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass die k-te Ableitung innerhalb des Konvergenzradius durch

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n (z-z_0)^{n-k}$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$ gegeben ist. Folgern Sie daraus, dass

$$f^{(k)}(z_0) = k! \cdot a_k$$

für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass die Potenzreihendarstellung einer Funktion f eindeutig ist, d.h. existiert eine zweite Potenzreihe mit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a'_n (z-z_0)^n$$

auf einer Umgebung von z_0, so folgern Sie, dass $a_n = a'_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

3.2. Eine Funktion $f : B_1(z_0) \to \mathbb{C}$ sei durch ihre Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-4)^{-(n+1)} (z-z_0)^n$$

bei Entwicklung in $z_0 = 4 + 2\mathrm{i}$ gegeben.

(a) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe und setzen Sie f auf ein größeres Gebiet fort.

(b) Bestimmen Sie die Koeffizienten $f^{(n)}(z_1)/n!$ bei Entwicklung von f im Punkt $z_1 = 4$ durch Auswertung der Ableitungen der Reihe und setzen Sie f auf ein größeres Gebiet fort.

(c) Verfahren Sie genauso im Punkt $z_2 = 0$.

(d) Setzen Sie f auf ein möglichst großes Gebiet fort.

Votieraufgaben

3.3. **(a)** Seien γ_1 und γ_2 Parametrisierungen zweier Strecken in der komplexen Ebene mit Parameterbereich $[0,1]$. Angenommen es ist $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ sowie $\gamma_1'(0) \neq 0$ und $\gamma_2'(0) \neq 0$, so zeigen Sie, dass der Schnittwinkel (modulo π) der beiden Geraden in z_0 durch $|\arg(\gamma_1'(0)) - \arg(\gamma_2'(0))|$ gegeben ist.

Seien γ_1 und γ_2 Parametrisierungen zweier Kurven in der komplexen Ebene mit Parameterbereich $[0,1]$. Wir nehmen an, dass beide Kurven einen gemeinsamen Startpunkt besitzten, d.h. $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ gilt. Wenn $\gamma_1'(0) \neq 0$ und $\gamma_2'(0) \neq 0$, so gibt es wohldefinierte Tangenten an γ_1 und γ_2 im Punkt z_0 und wir können derren Schnittwinkel betrachten. Als den (orientierten) Schnittinkel der beiden Kurven setzen wir nun

$$\measuredangle(\gamma_1, \gamma_2) := \arg(\gamma_1'(0)) - \arg(\gamma_2'(0))$$

(b) Ist f in einer offenen Umgebung von z_0 holomorph und ist $f'(z_0) \neq 0$, so zeigen Sie, dass f winkelerhalten ist, d.h.

$$\measuredangle(\gamma_1, \gamma_2) = \measuredangle(f \circ \gamma_1, f \circ \gamma_2)$$

erfüllt ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Abbildungen $z \mapsto z^n$ mit $n \geq 2$ in $z_0 = 0$ nicht winkelerhaltend sind.

(d) Zeigen Sie, dass alle gebrochen linearen Abbildungen (von Blatt 1) winkelerhaltend sind.

3.4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Berechnen Sie den Wert des Integrals

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} \, dt.$$

(*Hinweis:* Gehen Sie vor wie in Aufgabe **2.4** und verwenden Sie Homotopie.)

Zusatzaufgaben

3.5. **(a)** Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Folge komplexer Zahlen, sodass

$$-\alpha \leq \arg z_n \leq \alpha$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und einem $\alpha \in [0, \pi/2[$ erfüllt ist. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ genau dann absolut konvergiert, wenn sie konvergent ist.

(b) Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein Folge komplexer Zahlen mit $\operatorname{Re} z_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Desweiteren konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$. Zeigen Sie, dass dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$ konvergiert.

(c) Finden Sie eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen, so dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ konvergiert, die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^k$ aber divergieren.