Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Woche: 09. - 15. November 2015

Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 4

Heinz (29 Jahre alt): Ich ziehe so eine Art unsichtbare Linie hinter mir her, und ich habe den Zwang, diese Linie gerade hinter mir herlaufen zu lassen. Die darf nicht verwurstelt sein. Zum Beispiel kann ich kein Karussell fahren, weil ich mich nicht zurückdrehen kann. [...] Und dann habe ich einmal probiert, um eine Litfaßsäule herumzugehen - und schon hatte ich den Salat. Die Linie war verwickelt. Also musste ich zurückgehen. [...] Wenn ich zum Beispiel zur Arbeit fahre, morgens, dann versuche ich abends exakt denselben Weg zurückzufahren, um die Linie wieder aufzusammeln.
(Aus Jürgen Domian, Extreme Leben[1], 1996)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

4.1. Seien $r > 0$ und $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $f(z_0) = 0$ und $f'(z_0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ gibt und

$$\int_{\partial B_\varepsilon(z_0)} \frac{1}{f(z)}\, dz = \frac{2\pi \mathrm{i}}{f'(z_0)}$$

erfüllt ist.
(*Hinweis:* Verwenden Sie die Cauchysche Integralformel.)

4.2. **(a)** Seien $r > 0$ und $f : B_r(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z_0) = 0$. Dann ist f entweder die Nullfunktion oder es gibt ein $\varepsilon > 0$ sodass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in B_\varepsilon(z_0) \setminus \{z_0\}$ ist.
(*Hinweis:* Zeigen Sie diese Aussage dirket mit Hilfe der Potenzreihendarstellung von f.)

(b) Seien G ein Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Bezeichne

$$Z_f := \{z \in G \,:\, f(z) = 0\}$$

die Menge aller Nullstellen von f in G. Angenommen Z_f besitzt in G einen Häufungspunkt, so zeigen Sie, dass $f(z) = 0$ für alle $z \in G$ gilt.
(*Hinweis für Teilnehmer der Topologievorlesung:* Zeigen Sie, dass die Menge der Häufungspunkte von Z_f offen und abgeschlossen in G ist.)

(c) Seien G ein Gebiet und $f, g : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Angenommen die Menge

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, f(z) = g(z)\}$$

besitzt einen Häufungspunkt in G, so zeigen Sie, dass $f \equiv g$ auf G gilt.

Votieraufgaben

4.3. Let f be an entire function such that

$$|f(z)| \leq c(1 + |z|^n)$$

for $z \in \mathbb{C}$ and some constants $c > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Show that f is a polynomial of degree no more than n.

[1]Es ist nicht bekannt, ob diese Zwangsvorstellung durch das Studium der Homotopiegruppen ausgelöst wurde.

4.4. Wir nennen eine offene Menge $O \subset \mathbb{C}$ *sternförmig*, wenn es einen *Sternpunkt* $z_\star \in O$ gibt, sodass für alle $z \in O$ die Strecke $[z_\star, z]$ komplett in O verläuft.

(a) Seien $O \subset \mathbb{C}$ sternförmig und $f : O \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Konstruieren Sie eine Stammfunktion von f.

(b) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stetig und holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \neq 0\}$. Zeigen Sie, dass f eine ganze Funktion ist.
(*Hinweis:* Verwenden Sie den Satz von Morera aus der Vorlesung.)

(c) Untersuchen sie inwieweit die Bedingung, dass O sternförmig ist in Teilaufgabe **(a)** abgeschwächt werden kann.

Zusatzaufgaben

4.5. In der folgenden Aufgabe verwenden wir $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{C}$ synonym. Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet. Wir nennen eine Fuktion $u : G \to \mathbb{R}$ *harmonisch*, wenn

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

auf G gilt.

(a) Seien $G \subset \mathbb{C}$ und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ harmonisch sind.

Eine harmonische Funktion $u : G \to \mathbb{R}$ besitzt ein *harmonisches Konjugat*, wenn es eine weitere harmonische Funktion $v : G \to \mathbb{R}$ gibt, sodass die (komplexwertige) Funktion f definiert durch

$$f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$$

holomorph auf G ist.

(b) Ist $G \subset \mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend, d.h. jeder geschlossene Weg $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ ist nullhomotop, so zeigen Sie, dass jede harmonische Funktion $u : G \to \mathbb{R}$ ein harmonisches Konjugat besitzt und dieses (bis auf eine Konstante) eindeutig gegeben ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Aussage aus Teilaufgabe **(b)** auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ falsch ist.
(*Hinweis:* Logarithmus.)