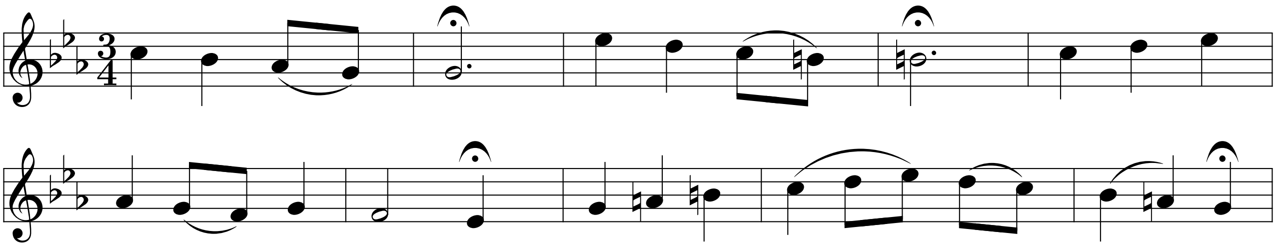
Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 6



(Johann Sebastian Bach, 1685 - 1750)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

6.1. Ziel dieser Aufgabe ist das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx \tag{1}$$

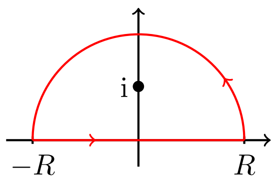
zu berechnen.

(a) Zur Wiederholung: Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral aus (1) konvergiert.

(b) Als Hilfsfunktion betrachten wir die Abbildung

$$f(z) = \frac{1}{(z+\mathrm{i})^2(z-\mathrm{i})^2}$$

für $z \in \mathbb{C}\backslash\{\pm\mathrm{i}\}$. Berechnen Sie das Integral von f entlang der Kurve $\gamma_R \cup [-R, R]$, wobei γ_R den Kreisbogen um den Ursprung mit Radius $R > 1$ in der oberen Halbebene bezeichnet (vgl. Skizze)



(*Hinweis:* Je nach Vorliebe Cauchys Integralformel oder Residuensatz.)

(c) Zeigen Sie, dass

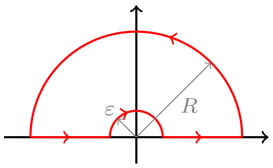
$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 0.$$

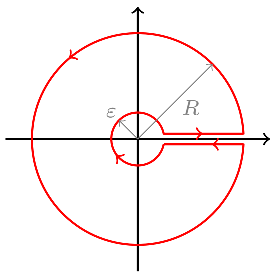
(d) Verwenden Sie die Aussagen der Teilaufgaben **(b)** und **(c)** um das Integral aus (1) zu berechnen.

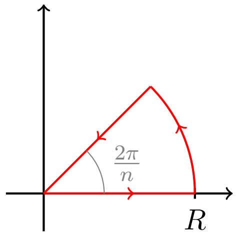
6.2. Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale

$$\textbf{(a)} \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx, \quad \textbf{(b)} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx, \quad \textbf{(c)} \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n}\,dx, \text{mit } m,n \in \mathbb{N}, m < n.$$

Hierfür helfen Ihnen die folgenden Integrationswege:







Votieraufgaben

6.3. Bestimmen Sie für folgende Funktionen die isolierten Singularitäten sowie die zugehörigen Residuen:

(a) $f(z) = z + \frac{1}{z}$, **(b)** $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, **(c)** $f(z) = \mathrm{e}^{1/(z-\mathrm{i})}$,

(d) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$, **(e)** $f(z) = \frac{\cos z}{z^2}$, **(f)** $f(z) = \frac{1}{1-\cos z}$.

6.4. **(a)** Wir wollen das uneigentliche Integral

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx$$

berechnen. Hierfür substituieren wir $x = \mathrm{i}y$ mit $dx = \mathrm{i}dy$ und erhalten

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^4}\,\mathrm{i}dy = \mathrm{i}I.$$

Hieraus folgt aber, dass $I = 0$. Warum kann dieses Ergebnis nicht stimmen?

(b) Berechnen Sie den tatsächlichen Wert von I.

(c) Wo genau liegt der Fehler in der Argumentation aus Teilaufgabe **(a)**?

Zusatzaufgaben

Lesen Sie das Skript zu den *Puiseux-Reihen* auf der Vorlesungshomepage und bearbeiten Sie anschließend folgende Aufgabe:

6.5. Wir betrachten das *Weierstraß-Polynom* $p_z(\zeta) := \zeta^3 - z\zeta - z$. Ziel dieser Aufgabe ist es die Nullstellen der Abbildng $\zeta \mapsto p_z(\zeta)$ in Abhängigkeit von $z \in \mathbb{C}$ zu beschreiben.

(a) Zeigen Sie, dass es ein $\varepsilon > 0$ und eine holomorphe Funktion $\varphi : K_\varepsilon(0) \to \mathbb{C}$ gibt, sodass

$$\zeta_z := \varphi(z^{1/3})$$

für alle $z \in K_{\varepsilon^3}(0)$ Nullstellen von p_z sind. Zeigen Sie ferner, dass sich alle Nullstellen von p_z so darstellen lassen.
(*Bemerkung:* Der Ausdruck $z^{1/3}$ bezeichnet dabei eine beliebige der drei möglichen Wurzeln.)

(b) Verwenden Sie die Aussage aus Teilaufgabe **(a)** um zu zeigen, dass sich die Nullstellen von p_z in einer Umgebung von $\zeta_0 = 0$ als Puiseux-Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, z^{n/3}$$

darstellen lassen.

(c) Ermitteln Sie die Koeffizieten a_1, a_2 und a_3, indem Sie die Reihe in das Polynom einsetzen und die Koeffizienten vergleichen.