

Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 65

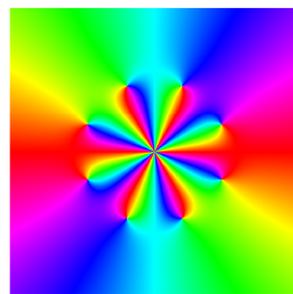
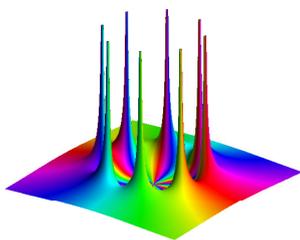
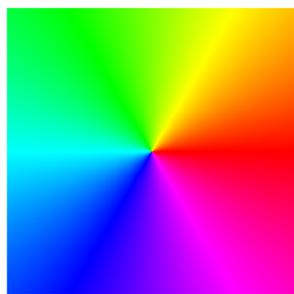
Kommentar zu den Phasenportraits

Im Folgenden finden Sie eine ausführliche Lösung zu Aufgabe 6.2. Neben der bloßen Darstellung eines möglichen Rechenweges sollen alternative Ansätze sowie in der vergangenen Woche häufig gestellte Fragen diskutiert werden. Unterstützt werden wir die *Phasenportraits* der Funktionen, welche integriert werden. Hierzu zunächst einige Anmerkungen:

Möchte man eine Abbildung $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ graphisch veranschaulichen so kann man dies tun, indem man einem Punkt $z \in \mathbb{C}$ entsprechend seines Bildes $f(z)$ in einer dreidimensionalen Grafik eine Höhe und eine Farbe zuordnet. Die Höhe soll dabei den Betrag $|f(z)|$, die Farbe (rot, gelb, grün, cyan, blau und violett mit entsprechenden Abstufungen) das Argument $\arg f(z)$ angeben (vgl. Abbildung 1b). Man wird dabei jedoch feststellen, dass, limitiert durch die Perspektive, nicht alle Informationen leicht ablesbar sind. Beschränkt man sich jedoch auf die bloße Darstellung der Argumente mittels Farben, betrachtet die dreidimensionale Graphik also von oben, sodass die Höhenunterschiede nicht mehr erkennbar sind, so lassen sich die wichtigen Eigenschaften der Funktion erkennen (vgl. Abbildung 1c). Im Folgenden ist dabei der Ursprung der komplexen Ebene stets in der Mitte des Bildes, die positive reelle Achse deutet nach rechts, die positive imaginäre Achse nach oben. In Abbildung 1 ist u.a. das Phasenportrait der Funktion

$$f(z) = \frac{z^6}{1 + z^8}$$

dargestellt. In der Mitte des Bildes wird der Farbkreis (vgl. Abbildung 1a) insgesamt sechs Mal in der richtigen Reihenfolge (rot, grün, blau bei Umlauf entgegen des Uhrzeigers) durchlaufen. Hier hat die Funktion eine 6-fache Nullstelle. Desweiteren erkennen wir acht Punkte, in denen der Farbkreis einmal in umgekehrter Reihenfolge (rot, blau, grün bei Umlauf entgegen des Uhrzeigers) durchlaufen wird. Hier hat f jeweils einen einfachen Pol.



(a) Phasenportrait der Abbildung $z \mapsto z$.

(b) Betrag und Phase der Abbildung $z \mapsto z^6/(1+z^8)$.

(c) Phasenportrait der Abbildung $z \mapsto z^6/(1+z^8)$.

Abbildung 1: Verschiedene Plots. In (a) wird die Abhängigkeit der Farbe vom Argument einer Zahl definiert.

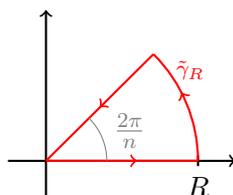


Abbildung 2: Integrationsweg für $\int_0^\infty x^{m-1}/(1+x^n) dx$.

6.2 (c)

Aufgabe. Man berechne das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx$$

unter Verwendung des Integrationsweges aus Abbildung 2.

Diese Teilaufgabe ist konzeptionell am einfachsten und am besten geeignet das generelle Vorgehen zu üben. Zunächst suchen wir nach einer meromorphen Funktion, welche, eingeschränkt auf die reelle Achse, wieder den Integranden liefert. In den meisten Fällen, so wie hier, kann man im Integranden einfach x durch z (innerhalb eines geeigneten Gebietes) ersetzen. Es gibt aber Ausnahmen (siehe dafür Teilaufgabe (a)). Wir betrachten also die Funktion

$$f(z) = \frac{z^{m-1}}{1+z^n}.$$

Diese besitzt eine einfache Singularitäten in

$$z_k = e^{i\pi(2k+1)/n},$$

wobei $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$. Innerhalb unseres vom Integrationsweg umlaufenen Gebietes liegt jedoch nur $z_0 = e^{i\pi/n}$.

- Da f die Form g/h mit $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$ und $g(z_0) \neq 0$ hat, können wir das Residuum nach einer Formel aus der Vorlesung berechnen und erhalten

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} = \frac{e^{i\pi(m-1)/n}}{ne^{i\pi(n-1)/n}} = \frac{1}{n}e^{i\pi(m-n)/n}.$$

- Mit dem Residuensatz folgt also

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^{m-1}}{1+z^n} dz = \frac{2\pi i}{n} e^{i\pi(m-n)/n}.$$

Unser Integrationsweg γ_R setzt sich nun aus drei Teilen zusammen:

$$\gamma_R = [0, R] \cup \tilde{\gamma}_R \cup e^{2\pi i/n} \cdot [R, 0],$$

wobei $\tilde{\gamma}_R$ den durch

$$\tilde{\gamma}_R(t) = R \cdot e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi/n]$$

parametrisierten Kreisbogen und $e^{2\pi i/n} \cdot [R, 0]$ den um $2\pi/n$ gedrehten Weg $[R, 0]$ bezeichnen. Jedes Wegstück ist nun einzeln zu betrachten. Zunächst wollen wir jedoch die Phasenportraits für einige

Werte von m und n , wie in Abbildung 3 gezeigt, betrachten. In allen Bildern erkennt man dabei eine gewisse Symmetrie. Rotieren wir Abbildung 3a um $\pi/3$, so bleibt die eigentliche Struktur erhalten auch wenn sich die konkreten Farben ändern. Die Integrale entlang der Wege $[0, R]$ und $e^{2\pi i/n} \cdot [R, 0]$ werden sich daher nicht gegenseitig aufheben, liefern aber bis auf einen konstanten Faktor denselben Wert. Dies nutzen wir im letzten Rechenschritt.

- Wir zeigen, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{z^{m-1}}{1+z^n} dz = 0.$$

Hierfür verwenden wir die übliche Abschätzung

$$\int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{z^{m-1}}{1+z^n} dz \leq \frac{2\pi R}{n} \cdot \max_{z \in \tilde{\gamma}_R} \left| \frac{z^{m-1}}{1+z^n} \right|.$$

Mit

$$\left| \frac{z^{m-1}}{1+z^n} \right| = \frac{|z|^{m-1}}{|1+z^n|} \leq \frac{R^{m-1}}{R^n - 1} = \frac{R^{m-n-1}}{1 - R^{-n}}$$

für $z \in \tilde{\gamma}_R$ und $R > 1$ folgt daraus, dass

$$\int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{z^{m-1}}{1+z^n} dz \leq \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{R^{m-n}}{1 - R^{-n}} \rightarrow 0$$

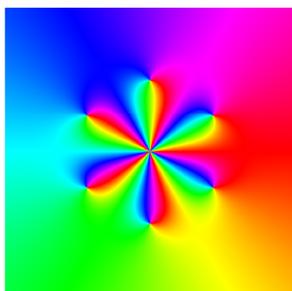
für $R \rightarrow \infty$ und $m < n$.

- Der Weg $[0, R]$ lässt sich einfach durch $\gamma(t) = t$ mit $t \in [0, R]$ parametrisieren und wir erhalten, dass

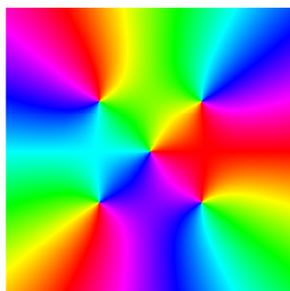
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[0, R]} \frac{z^{m-1}}{1+z^n} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{t^{m-1}}{1+t^n} dt = \int_0^\infty \frac{t^{m-1}}{1+t^n} dt.$$

- Für den Weg $e^{2\pi i/n} \cdot [R, 0]$ wählen wir eine Parametrisierung

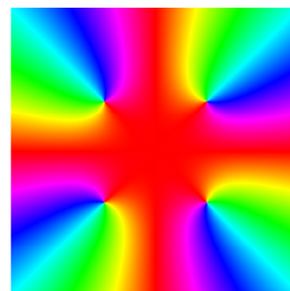
$$\gamma(t) = t \cdot e^{2\pi i/n}, \quad t \in [0, R]$$



(a) $m = n = 6$.



(b) $m = 2, n = 4$.



(c) $m = 1, n = 4$.

Abbildung 3: Phasenportraits von $z \mapsto z^{m-1}/(1+z^n)$ für exemplarische Werte von m und n .

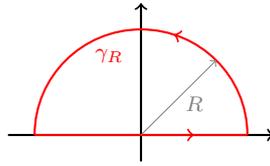


Abbildung 4: Alternativer Integrationsweg für $\int_0^\infty 1/(1+x^4) dx$.

in umgekehrter Richtung. Wir müssen im Integral also einen Vorzeichenwechsel beachten und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{e^{2\pi i/n}[-R,0]} \frac{z^{m-1}}{1+z^n} dz &= - \int_0^R \frac{(\gamma(t))^{m-1}}{1+(\gamma(t))^n} \gamma'(t) dt = - \int_0^R \frac{t^{m-1} e^{2\pi i(m-1)/n}}{1+t^n e^{2\pi i n/n}} e^{2\pi i/n} dt \\ &= -e^{2\pi im/n} \cdot \int_0^R \frac{t^{m-1}}{1+t^n} dt. \end{aligned}$$

Bis auf einen konstanten Faktor konvergiert die rechte Seite wieder gegen das gegebene Integral.

Zusammenfassend erhalten wir

$$\frac{2\pi i}{n} e^{\pi i(m-n)/n} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^{m-1}}{1+z^n} dz = (1 - e^{2\pi im/n}) \cdot \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx,$$

bzw.

$$\int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{1+x^n} dx = \frac{2\pi i}{n} e^{\pi i(m-n)/n} (1 - e^{2\pi im/n})^{-1} = \frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin(\pi m/n)}. \quad (1)$$

Der letzte Schritt folgt dabei wegen

$$1 - e^{2\pi im/n} = e^{\pi im/n} (e^{-\pi im/n} - e^{\pi im/n}) = -2i e^{\pi im/n} \sin(\pi m/n).$$

Alternativer Integrationsweg

Anstelle des in der Aufgabenstellung vorgeschlagenen Weges hätte man natürlich auch um alle anderen Singularitäten herumlaufen können (das Phasenportrait ist bis auf die konkrete Farbe invariant unter Drehungen um $2\pi/n$). Einen der Wege auf die reelle Achse zu verlegen vereinfacht lediglich die Rechnung.

In Aufgabe **6.4 (b)** war der Wert des Integrals

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx$$

zu berechnen. Setzt man in (1) die Werte $m = 1$ und $n = 4$ ein, so liefert dies $\pi/(2\sqrt{2})$. Alternativ können wir aber auch den Weg in Abbildung 4 wählen. Hier werden die zwei einfachen Singularitäten bei $z_0 = e^{i\pi/4}$ und $z_1 = e^{3i\pi/4}$ umlaufen. Für die Residuen erhält man

$$\text{Res}(f; z_0) = \frac{1}{4} e^{-3\pi i/4}, \quad \text{Res}(f; z_1) = \frac{1}{4} e^{-9\pi i/4}$$

und daraus nach Residuensatz

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz = \frac{2\pi i}{4} (e^{-3\pi i/4} + e^{-9\pi i/4}) = \frac{2\pi i}{4} i \text{Im} e^{-3\pi i/4} = -\frac{\pi}{2} \sin(-\pi/4) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

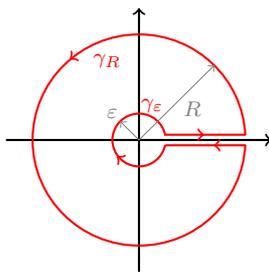


Abbildung 5: Integrationsweg für $\int_0^\infty \sqrt{x}/(x^2 + 1) dx$.

Anschließend zeigt man, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{1}{1+z^4} dz = 0$$

genau wie oben, wobei $\tilde{\gamma}_R$ das Wegstück entlang des Kreisbogens bezeichnet. Zusammenfassend erhält man

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{z^{m-1}}{1+z^n} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{x}{1+x^4} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Man beachte, dass im letzten Schritt bereits vorausgesetzt ist, dass das gegebene Integral konvergiert, ansonsten wird evtl. nur ein Hauptwert berechnet. Die Konvergenz zu zeigen stellt kein Problem dar, muss aber gemacht werden! Aus Gründen der Symmetrie folgt abschließend

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Weitere Aufgaben

65.1. Verwenden Sie geeignete Integrationswege, um folgende uneigentliche Integrale zu berechnen:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2} dx,$

(b) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx,$

(c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} dx,$

(d) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 2} dx.$

(Ergebnisse: $4\pi/(3\sqrt{3}), \pi/\sqrt{3}, \pi/e, -\pi/e^\pi$.)

6.2 (b)

Aufgabe. Man berechne das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} dx$$

unter Verwendung des Integrationsweges aus Abbildung 5.

In diesem Beispiel wollen wir die Funktion

$$f(z) = \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1}$$

betrachten. Ihre Definition wirft dabei jedoch schon eine entscheidene Frage auf: Wie ist die Wurzel in diesem Ausdruck definiert? In der Aufgabe ist als Hinweis ein Weg angegeben, welcher die positive reelle Achse vermeidet. Es ist daher naheliegend, einen Schnitt entlang der positiven reellen Achse einzuführen und die Wurzel auf $\mathbb{C} \setminus [0, \infty]$ zu betrachten. Diese ist dann durch

$$z^{1/2} := \sqrt{|z|} \cdot e^{i \cdot \arg z / 2}$$

gegeben. Das Argument $\arg z$ ist dabei im Intervall $[0, 2\pi]$ zu wählen. Warum wir dabei tatsächlich beide Intervallgrenzen 0 und 2π benötigen, sehen wir unten bei der Betrachtung der Geradenstücke oder anhand des Phasenportraits in Abbildung 6a. Abbildung 6b zeigt den anderen Zweig. Die positive reelle Achse (bzw. der Schnitt) ist in beiden Bildern anhand des un stetigen Farbwechsels erkennbar. In 6a haben wir oberhalb des Schnittes eine rote Färbung, was dem Argument 0 entspricht, unterhalb dominiert cyan, was dem Argument π entspricht (vgl. hierzu Abbildung 1a). Die Integrale entlang der beiden Geradenstücke können sich also nicht gegenseitig aufheben! Des Weiteren erkennen wir in den Phasenportraits nochmals die Nullstelle bei $z = 0$ und die beiden Pole bei $z = \pm i$.

- Wir berechnen das Integral über den gesamten Weg mit Hilfe des Residuensatz. Anhand der Umformung

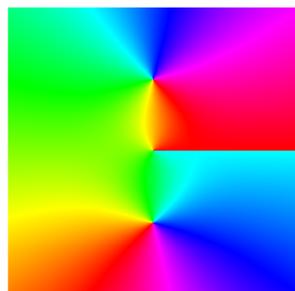
$$f(z) = \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} = \frac{z^{1/2}}{(z - i)(z + i)}$$

sieht man, dass f in $\pm i$ jeweils eine Singularität der Ordnung 1 besitzt. Die Residuen lassen sich einfach mit Hilfe der Formel aus der Vorlesung berechnen. Man erhält

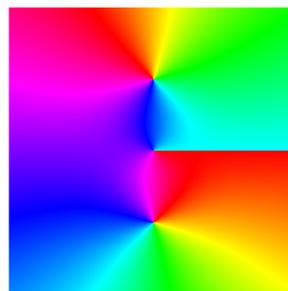
$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} (z - i) \frac{z^{1/2}}{(z - i)(z + i)} = \frac{i^{1/2}}{2i}, \\ \operatorname{Res}(f, -i) &= \lim_{z \rightarrow -i} (z + i) \frac{z^{1/2}}{(z - i)(z + i)} = -\frac{(-i)^{1/2}}{2i}. \end{aligned}$$

Für das Integral entlang des geschlossenen Weges $\gamma_{R,\varepsilon}$ folgt also

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{i^{1/2}}{2i} - \frac{(-i)^{1/2}}{2i} \right) = \pi \left(e^{\pi i/4} - e^{3\pi i/4} \right) = 2\pi \cdot \operatorname{Re} \left(e^{\pi i/4} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$



(a) Unser gewählter Zweig.



(b) Der andere Zweig.

Abbildung 6: Phasenportraits der beiden holomorphen Zweige von $z \mapsto z^{1/2}/(1 + z^2)$. Ausschneiden und richtiges Zusammenkleben liefert die Riemannfläche.

Unser Weg setzt sich aus insgesamt vier Teilstücken

$$\gamma_{R,\varepsilon} = [\varepsilon + 0 \cdot i, R + 0 \cdot i] \cup \gamma_R \cup [R - 0 \cdot i, \varepsilon - 0 \cdot i] \cup \gamma_\varepsilon$$

zusammen (vgl. Skizze in Abbildung 5). Dabei bezeichnen $[\varepsilon + 0 \cdot i, R + 0 \cdot i]$ bzw. $[\varepsilon - 0 \cdot i, R - 0 \cdot i]$ die Geradenstücke ober-, bzw. unterhalb der positiven reellen Achse. Wir haben nun jeden dieser Wege einzeln zu betrachten:

- Wir zeigen, dass

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\varepsilon} \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} dz = 0.$$

Hierfür verwenden wir die übliche Abschätzung

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} dz \leq 2\pi\varepsilon \cdot \max_{z \in \gamma_\varepsilon} \left| \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} \right|.$$

Mit

$$\left| \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} \right| = \frac{\sqrt{|z|}}{|z^2 + 1|} \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{1 - \varepsilon^2}$$

für $0 \leq \varepsilon < 1$ folgt daraus, dass

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} dz \leq \frac{2\pi\varepsilon^{3/2}}{1 - \varepsilon} \rightarrow 0$$

für $\varepsilon \rightarrow 0$.

- Wir zeigen, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} dz = 0.$$

Mit der gleichen Abschätzung wie eben erhalten wir, dass

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} dz \leq \frac{2\pi R^{3/2}}{R^2 - 1} \rightarrow 0,$$

für $R > 1$, bzw. $R \rightarrow \infty$.

- Wir parametrisieren den Weg $[\varepsilon + 0 \cdot i, R + 0 \cdot i]$ durch

$$\gamma(t) = t, \quad t \in [\varepsilon, R],$$

und erhalten wegen $\arg t = 0$, dass $t^{1/2} = \sqrt{t} \cdot e^{i \cdot 0} = \sqrt{t}$, bzw.

$$\int_{[\varepsilon+0 \cdot i, R+0 \cdot i]} \frac{z^{1/2}}{z^2 + 1} dz = \int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{t}}{t^2 + 1} dt.$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$ konvergiert die rechte Seite dabei gegen das gegebene Integral.

- Wir parametrisieren den Weg $[\varepsilon - 0 \cdot i, R - 0 \cdot i]$ durch

$$\gamma(t) = t, \quad t \in [\varepsilon, R]$$

in umgekehrte Richtung, müssen also an den Vorzeichenwechsel denken. Gleichzeitig ist nun $\arg t = 2\pi$, d.h. es folgt

$$t^{1/2} = \sqrt{t} \cdot e^{2\pi i/2} = -\sqrt{t}$$

und wir erhalten

$$\int_{[R-0 \cdot i, \varepsilon-0 \cdot i]} \frac{z^{1/2}}{z^2+1} dz = - \int_{\varepsilon}^R \frac{(\gamma(t))^{1/2}}{(\gamma(t))^2+1} \gamma'(t) dt = - \int_{\varepsilon}^R \frac{-\sqrt{t}}{t^2+1} dt = \int_{\varepsilon}^R \frac{\sqrt{t}}{t^2+1} dt.$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$ konvergiert die rechte Seite wieder gegen das gegebene Integral.

Zusammenfassend erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\sqrt{2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{z^{1/2}}{z^2+1} dz \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \left(\int_{[\varepsilon+0 \cdot i, R+0 \cdot i]} \frac{z^{1/2}}{z^2+1} dz + \int_{[\varepsilon-0 \cdot i, R-0 \cdot i]} \frac{z^{1/2}}{z^2+1} dz \right) \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{z^{1/2}}{z^2+1} dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^{1/2}}{z^2+1} dz \\ &= 2 \cdot \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^2+1} dt \end{aligned}$$

und damit

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{t}}{t^2+1} dt = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Alternativer Integrationsweg

Eine häufig gestellte Frage war, ob man nicht auch den Weg aus Teilaufgabe (a) (vgl. Abbildung 7) zur Berechnung des Integrals nehmen könnte. Natürlich ist dies auch möglich. Dazu wählen wir wieder

$$f(z) = \frac{z^{1/2}}{z^2+1}$$

und erklären $z^{1/2}$ wie oben. Damit liegt aber nur noch eine Singularität innerhalb des vom Integrationsweg umschlossenen Weges und wir erhalten mit Hilfe des Residuensatzes, dass

$$\int_{\gamma_{R,\varepsilon}} \frac{z^{1/2}}{z^2+1} dz = \pi \cdot i^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1+i).$$

Desweiteren gelten

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_{\varepsilon}} \frac{z^{1/2}}{z^2+1} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^{1/2}}{z^2+1} dz = 0$$

und

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{[\varepsilon+0-i, R+0-i]} \frac{z^{1/2}}{z^2+1} dz = \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$$

unverändert. Neu hinzu kommt hingegen ein Anteil entlang des Weges $[-R, -\varepsilon]$. Diesen parametrisieren wir in umgekehrter Richtung durch

$$\gamma(t) = -t, \quad t \in [\varepsilon, R]$$

und erhalten wegen $\arg \gamma(t) = \pi$, dass

$$(\gamma(t))^{1/2} = \sqrt{t} \cdot e^{\pi i/2} = it,$$

bzw.

$$\int_{[-R, -\varepsilon]} \frac{z^{1/2}}{z^2+1} dz = (-1)(-1)i \int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{t}}{t^2+1} dt = i \int_\varepsilon^R \frac{\sqrt{t}}{t^2+1} dt.$$

Zusammenfassend haben wir also im Grenzwert $\varepsilon \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$, dass

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}}(1+i) = (1+i) \cdot \int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{t^2+1} dt$$

und erhalten daraus wieder obiges Ergebnis.

Weitere Aufgaben

65.2. Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^3+1} dx.$$

(Ergebniss: $\pi/3$.)

65.3. Berechnen Sie für $\alpha \in]-1, 1[$ den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(1+x)^2} dx.$$

6.2 (a)

Aufgabe. Man berechne das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2} dx \tag{2}$$

unter Verwendung des Integrationsweges aus Abbildung 7.

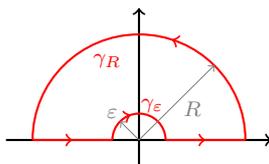


Abbildung 7: Integrationsweg für $\int_0^\infty \sin^2 x/x^2 dx$.

Das erste Problem bei der Lösung dieser Aufgabe besteht darin, eine geeignete meromorphe Funktion zu finden, welche eingeschränkt auf die reelle Achse der Funktion $x \mapsto \sin^2 x/x^2$ entspricht. Man ist dabei versucht einfach

$$f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^2}$$

zu setzen. Diese Funktion hat jedoch nur eine hebbare Singularität bei $z = 0$, d.h. der Residuensatz liefert keine verwertbaren Informationen über das Integral entlang des geschlossenen Weges. Des Weiteren beruht unser Verfahren darauf, dass die Integrale über Bögen mit großen Radien verschwinden, d.h. dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{\sin^2 z}{z^2} dz = 0$$

gilt. Dies zu zeigen ist hier aber nicht möglich, da $\sin(ix)$ für $x \rightarrow \infty$ exponentiell wächst und $\sin^2 z/z^2$ daher den Faktor, welchen man durch die Weglänge erhält, nicht kompensieren kann. Um nun eine geeignete Funktion zu finden, kann man sich z.B. der Doppelwinkelformel des Kosinus bedienen. Es gilt

$$2 \sin^2 x = 1 - \cos(2x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dabei hat die Funktion $z \mapsto 1 - \cos(2z)$ eine einfache Fortsetzung auf die komplexe Ebene, man muss lediglich $-i \sin(2z)$ addieren und erhält

$$1 - (\cos(2z) + i \sin(2z)) = 1 - e^{2iz}.$$

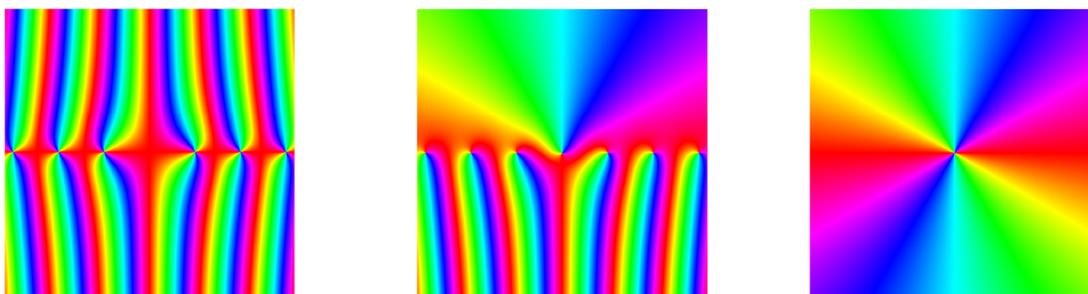
Wir setzen also

$$f(z) = \frac{1 - e^{2iz}}{z^2}.$$

Diese Funktion besitzt eine Singularität in $z = 0$. Verwenden wir die Reihendarstellung von e^{2iz} und setzen diese in den Ausdruck für f ein, so erkennen wir, dass

$$\text{Res}(f; 0) = -2i.$$

Um das Integral (2) zu berechnen, können wir nicht einfach einen Halbkreis wie in in der alternativen Lösung von **6.2 (b)** wählen, da der Weg über den Pol laufen würde. Unser Weg muss dem Pol also ausweichen. Abbildung 8 zeigt die Phasenportraits der beiden möglichen Ansätze. Auf der unteren Halbebene sowie der reellen Achse sehen beide Bilder gleich aus. Unser gewähltes f eignet sich also nur, wenn wir einen Weg über die obere Halbebene wählen. Hier verhält sich unsere Funktion ungefähr wie die Abbildung $z \mapsto 1/z^2$, was das richtige Abfallverhalten garantiert, um später (3) zu zeigen. Die einzelnen Rechenschritte verlaufen analog zu den Rechnungen von oben:



(a) $z \mapsto \sin^2(z)/z^2$.

(b) $z \mapsto (1 - e^{2iz})/z^2$.

(c) $z \mapsto 1/z^2$.

Abbildung 8: Vergleich der Abbildungen $z \mapsto \sin^2 z/z^2$ und $z \mapsto (1 - e^{2iz})/z^2$ und Portrait der Funktion $z \mapsto 1/z^2$.

- Das Integral entlang des Bogens γ_R verschwindet und wir zeigen, dass

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma_R} \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} dz = 0. \tag{3}$$

Wie oben ist zunächst

$$\int_{\gamma_R} \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} dz \leq \pi R \cdot \max_{z \in \gamma_R} \frac{|1 - e^{2iz}|}{|z|^2}.$$

Wegen $|1 - e^{2iz}| \leq 1 + |e^{2iz}| = 1 + e^{-2\text{Im}z} \leq 2$ erhalten wir daraus, dass

$$\int_{\gamma_R} \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} dz \leq \frac{2\pi}{R},$$

was für $R \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert.

- Das Integral entlang des Bogens γ_ϵ können wir nach der Formel aus Aufgabe 7.1 berechnen und erhalten

$$\int_{\gamma_\epsilon} \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} dz = -i(\pi - 0) \cdot \text{Res}(f; 0) = -2\pi.$$

- Die Integrale entlang der beiden Geradenstücke fassen wir der Einfachheit halber gleich zusammen. Es ist

$$\begin{aligned} \int_{[-R, -\epsilon]} \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} dz + \int_{[\epsilon, R]} \frac{1 - e^{2iz}}{z^2} dz &= \int_\epsilon^R \left(\frac{1 - e^{2it}}{t^2} + \frac{1 - e^{-2it}}{t^2} \right) dt \\ &= 2 \int_\epsilon^R \frac{1 - \cos(2t)}{t^2} dt = 4 \int_\epsilon^R \frac{\sin^2 t}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Das Integral auf der rechten Seite konvergiert dabei wieder gegen das gegebene Integral.

Zusammenfassend erhalten wir im Grenzwert $\epsilon \rightarrow 0$ und $R \rightarrow \infty$, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2} dt = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Weitere Aufgaben

65.4. Berechnen Sie den Wert des uneigentlichen Integrals

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx.$$

(Hinweis: Betrachten Sie $e^{3iz} - 3e^{iz} + 2$. Warum eigentlich?)

65.5. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(Hinweis: Geschlossener Polygonzug durch die Punkte $1/2 + Re^{i\pi/4}$, $-1/2 + Re^{i\pi/4}$, $-1/2 - Re^{i\pi/4}$ und $1/2 - Re^{i\pi/4}$.)

65.6. Die untenstehende Abbildung zeigt das Phasenportrait einer rationalen Funktion. Bestimmen Sie diese Funktion bis auf einen konstanten Faktor.

