Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 7

Le plus court chemin entre deux vérités dans le domaine réel passe par le domaine complexe.
(Jacques Hadamard, 1865 - 1963)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

7.1. (a) Seien $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $f : K_r(z_0) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. In z_0 habe die Funktion einen einfachen Pol. Für fest gewählte $0 \leq \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi$ betrachten wir Wege

$$\gamma_\varepsilon : [\varphi_1, \varphi_2] \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto z_0 + \varepsilon \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

mit $0 < \varepsilon < r$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)\, dz = \mathrm{i}(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \mathrm{Res}\,(f, z_0).$$

(b) Angenommen es ist $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$, so zeigen Sie, dass

$$\int_{\gamma_\varepsilon} \frac{1}{(z - z_0)^n}\, dz$$

für $\varepsilon \to 0$ und ein $n \geq 2$ divergiert.
Warum widerspricht dies nicht der Aussage aus Teilaufgabe **(a)**?

7.2. Folgende Aufgaben sind typische Anwendungen des Satz von Rouché:

(a) Wieviele Lösungen besitzt die Gleichung

$$z^8 - 5z^5 - 2z + 1 = 0$$

innerhalb von $K_1(0)$?

(b) Sei $\lambda > 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$\mathrm{e}^{-z} + z = \lambda$$

genau eine Lösung in der rechten Halbebene mit $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ besitzt. Zeigen Sie ferner, dass diese reell ist.

Votieraufgaben

7.3. Für $x \in \mathbb{R}$ sei $A(x)$ eine $n \times n$-Matrix, deren Einträge stetig von x abhängen. Sei λ_0 ein Eigenwert von $A(x_0)$ mit algebraischer Vielfachheit $k \in \mathbb{N}$ und $r > 0$ so klein gewählt, dass $A(x_0)$ keine weiteren Eigenwerte in $\overline{K_r(\lambda_0)}$ besitzt.
Zeigen Sie, dass dann ein $\delta > 0$ existiert, sodass die Matrizen $A(x)$ mit $|x - x_0| < \delta$ genau k Eigenwerte (unter Beachtung der Vielfachheit gezählt) innerhalb von $K_r(\lambda_0)$ besitzen.
(*Hinweis:* Satz von Rouché.)

7.4. Sei γ der durch

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto \begin{cases} (t-1)^2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}}{1-t}} & \text{für } t \in [0,1[, \\ t-1 & \text{für } t \in [1,2] \end{cases}$$

parametrisierte Weg in der komplexen Ebene.

(a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Weges mit der rellen Achse, fertigen Sie eine Skizze des Weges an und zeigen Sie, dass dieser geschlossen ist.

(b) Zur Wiederholung: Berechnen Sie die Länge des Weges.

(c) Gegeben seien die Punkte

$$z_n := -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(n+1/2)^2} + \frac{1}{(n+3/2)^2}\right) \in \mathbb{C}$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$. Bestimmen Sie $\nu(\gamma; z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$

Zusatzaufgaben

7.5. Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ eine hermitesche Matrix mit Eigenwerten in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$. Für eine holomorphe Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ erklären wir $f(A)$ durch

$$f(A) := \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma f(z)(zE - A)^{-1}\, dz$$

wobei der Weg γ alle Eigenwerte von f einmal umläuft und $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix bezeichnet. Die matrixwertige Integration ist dabei komponentenweise zu verstehen.

(a) Zeigen Sie, dass

$$f(A)g(A) = (fg)(A)$$

für zwei holomorphe Funktionen $f, g : G \to \mathbb{C}$ gilt.
(*Hinweis:* Zeigen Sie, dass $(z_1E-A)^{-1} - (z_2E-A)^{-1} = (z_2-z_1)(z_1E-A)^{-1}(z_2E-A)^{-1}$.)

(b) Zeigen Sie: Für $f(z) = \sum_{k=-m}^{n} c_k z^k$ erhält man

$$f(A) = \sum_{k=-m}^{n} c_k A^k.$$

(c) Sei nun $f(z) = z^{1/2}$, wobei wir damit die holomorphe Fortsetzung der positiven reellen Wurzel auf einem Gebiet, auf dem dies möglich ist, meinen.

(i) Berechnen Sie $B := f(A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie anschließend B^2, was fällt auf?

(ii) Sei nun $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Wie wirkt $f(A)$ auf einen Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, wenn dieser bzgl. einer Basis aus Eigenvektoren von A dargestellt ist? Wie würden Sie $f(A)$ interpretieren?

(d) Wie kann man $f(A)$ für $f(z) = 1$ interpretieren, wenn nur ein Teil der Eigenwerte von γ umlaufen wird?