Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 75

75.1. Bestimmen Sie die Windungszahlen $\nu(\gamma; 0)$ für die folgenden Wege:

(a) $\gamma = [1 + \mathrm{i}, -1 + \mathrm{i}] \cup [-1 + \mathrm{i}, -1 - \mathrm{i}] \cup [-1 - \mathrm{i}, 1 - \mathrm{i}] \cup [1 - \mathrm{i}, 1 + \mathrm{i}]$,

(b) $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$ mit

$$\gamma_k : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto (5/2 - k) + k\mathrm{e}^{\mathrm{i}t},$$

(c) $\gamma = [-42, -1] \cup \tilde{\gamma}$ mit

$$\tilde{\gamma} : [\pi, 5\pi] \to \mathbb{C}, \qquad t \mapsto \frac{t}{\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}.$$

Fertigen Sie jeweils auch eine Skizze des Weges an.

75.2. Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$$

für $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$. Entwickeln Sie f ein eine Laurentreihe, welche in den folgenden Ringgebieten konvergiert:

(a) $|z| < 1$, **(b)** $1 < |z| < 2$, **(c)** $|z| > 2$, **(d)** $|z - 1| < 1$.

75.3. Finden und zeichnen Sie die Konvergenzgebiete der folgenden Laurentreihen:

(a) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^n$, **(b)** $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{3^n + 1}$, **(c)** $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{\mathrm{e}^n + \mathrm{e}^{-n}}$, **(d)** $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{z^n}{n^2 + 2}$.

75.4. **(a)** Wir wollen die Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$$

innerhalb der Einheitskreisscheibe $K_1(0)$ finden. Hierfür kann man den Satz von Rouché mit $f(z) = -5z^4$ und $g(z) = z^7 + z^2 - 2$ verwenden. Im folgenden skizzieren wir das genaue Vorgehen:

(i) Zeigen Sie, dass

$$|f(z)| \geq 5 > 4 \geq |g(z)|$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass f in $K_1(0)$ genau vier Nullstellen besitzt.

(iii) Wenden Sie den Satz von Rouché auf $f + g$ an.

(b) Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung

$$2z^2 - z^3 + 3z^2 - z + 8 = 0$$

innerhalb der Einheitskreisscheibe $K_1(0)$? Verwenden Sie die Funktionen $f(z) = 3z^2 - z + 8$ und $g(z) = 2z^2 - z^3$.

(c) Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung

$$z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2 = 0$$

innerhalb der Einheitskreisscheibe $K_1(0)$?