Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 8

Comment les anciens comprenaient-ils la Loi? C'était pour eux une harmonie interne, statique pour ainsi dire et immuable; ou bien c'était comme un modèle que la nature s'efforait d'imiter. Une loi, pour nous, ce n'est plus cela du tout; c'est une relation constante entre le phénomène d'aujourd'hui et celui de demain; en un mot, c'est une équation différentielle.[1]
(Henri Poincaré, La Valeur de la Sience, 1911, p. 174)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

8.1. **(a)** Geben Sie zunächst die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen und anschließend die Lösungen des Anfangswertproblems an:

(i) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x^2}{y^3},\ y(0) = \pm 1;$ (ii) $\dfrac{dy}{dx} = \mathrm{e}^y \sin x,\ y(0) = 0;$

(iii) $x^2 y = (1+x)y',\ y(0) = 1;$ (iv) $\sqrt{(x^2-1)(y^2-1)}\,y' = -x^2,\ y(2) = 2.$

(b) Zeigen Sie, dass sich eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c)$$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $b \neq 0$ mit Hilfe der Substitution $z = ax + by + c$ auf eine Gleichung mit getrennten Variablen zurückführen lässt.
Verwenden Sie dies um die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y' = (x + y)^2$$

zu finden.

(c) Wir betrachten die Gleichung

$$y' = (y^2)^{1/3},$$

diese besitzt offensichtlich die Lösung $y(x) = 0$. Finden Sie alle weiteren Lösungen. Zeigen Sie ferner, dass auch das Anfangswertproblem $y(x_0) = 0$ nicht eindeutig gelöst werden kann.

[1] Wie verstanden die Alten das Gesetz? Für sie war es eine innere Harmonie, sozusagen statisch und unveränderlich; oder es war ein Idealbild, dem nachzustreben die Natur sich bemühte. Für uns hat ein Gesetz nicht mehr diese Bedeutung; es ist eine unveränderliche Beziehung zwischen der Erscheinung von heute und der von morgen; mit einem Wort, es ist eine Differentialgleichung.

8.2. Um zweideutige Notation zu vermeiden setzen wir in dieser Aufgabe ausnahmsweise

$$K_1(0) := \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq 1\},$$

d.h. wir betrachten $K_1(0)$ bereits als abgeschlossen. $\partial K_1(0)$ ist dann wie üblich den Rand von $K_1(0)$, die offene Kreisscheibe bezeichnen wir mit

$$\mathring{K}_1(0) := K_1(0) \setminus \partial K_1(0).$$

Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ sei

$$\overline{G} := \{\overline{z} \,:\, z \in G\}$$

das an der reellen Achse gespiegelte Gebiet.
(*Hinweis:* Die Teilaufgaben **(c)** und **(d)** sind optional und müssen nicht unbedingt bearbeitet werden, machen aber trotzdem Spaß.)

(a) Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $g : \overline{G} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$g(z) := \overline{f(\overline{z})}.$$

Zeigen Sie, dass auch g holomorph ist.

(b) Sei $f : K_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph auf $\mathring{K}_1(0)$ und stetig auf $K_1(0)$ mit $f(\partial K_1(0)) \subset \partial K_1(0)$ und $\tilde{f} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{für } z \in K_1(0), \\ \left(\overline{f(1/\overline{z})}\right)^{-1} & \text{für } z \in \mathbb{C} \setminus K_1(0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{f}$ meromorph auf $\mathbb{C} \setminus \partial K_1(0)$ und stetig auf einer Umgebung von $K_1(0)$ ist. Wo liegen die Polstellen von $\tilde{f}$?

(c) Folgern Sie aus Teilaufgabe **(b)**, dass $\tilde{f}$ meromorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist.
(*Hinweis:* Betrachten Sie die Abbildung $w \mapsto \tilde{f}(\mathrm{e}^w)$ und verwenden Sie Aufgabe **4.4**.)

(d) Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Nullstellen von f in $\mathring{K}_1(0)$ und $k_1, k_2, \ldots, k_n$ die entsprechenden Vielfachheiten. Zeigen Sie, dass

$$\tilde{f}(z) = \theta \cdot \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{z - a_i}{1 - \overline{a_i} z} \right)^{k_i},$$

für ein $\theta \in \partial K_1(0)$. (*Hinweis:* Das geht mit dem Satz von Liouville.)

Votieraufgaben

8.3. Seien $O \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : O \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Desweiteren betrachten wir einen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(0) \in O$. Wir definieren nun eine Funktion $r : [0,1] \to [0,\infty]$ und setzen

- $r(t) = 0$, falls f entlang des Weges $\gamma|_{[0,t]}$ keine analytische Fortsetzung besitzt, bzw.
- $r(t)$ als den maximalen Konvergenzradius den man im anderen Fall bei Fortsetzung von f entlang von $\gamma|_{[0,t]}$ erhält.

Zeigen Sie nun, dass die so definierte Funktion r entweder für alle oder kein $t \in [0,1]$ unendlich ist. Zeigen Sie im letzten Fall zudem, dass die Abbildung $t \mapsto r(t)$ stetig ist.

8.4. Das Ebbinghaussche Modell des Vergessens Ein Student hat sich einen gewissen Wissensstoff eingeprägt (etwa für ein Examen). Mit der Zeit wird er einiges davon vergessen. $p(t)$ bedeutet den Prozentsatz des Stoffes, den er t Zeiteinheiten nach dessen voller Meisterung noch im Gedächtnis hat; es ist also $p(0) = 100$. Optimistischerweise wird man annehmen dürfen, daß er einen gewissen Prozentsatz b $(0 < b < 100)$ des Stoffes nie vergißt, ferner wird man den Ansatz wagen, daß zur Zeit t die Vergessensrate $\dot{p}(t)$ proportional zu dem Prozentsatz des noch zu vergessenden Stoffes, also zu $p(t) - b$, ist. Formuliere das zugehörige Anfangswertproblem, löse es und skizziere die Lösung. Sie wird nach dem deutschen Psychologen Hermann Ebbinghaus (1850-1909) das *Ebbinghaussche Vergessensmodell* genannt. Das klassische Buch "Über das Gedächtnis" von Ebbinghaus hat die Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1971 neu aufgelegt.
(*Quelle:* Harro Heuser, Gewöhnliche Differentialgleichungen, 1995.)

Zusatzaufgaben

8.5. Folgende Reihen konvergieren auf der offenen Einheitskreisscheibe $K_1(0)$ und definieren dort holomorphe Funktionen:

$$\textbf{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}, \qquad \textbf{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n!}}{n!}.$$

Zeigen Sie, dass diese keine holomorphe Fortsetzung über $K_1(0)$ hinaus besitzen.

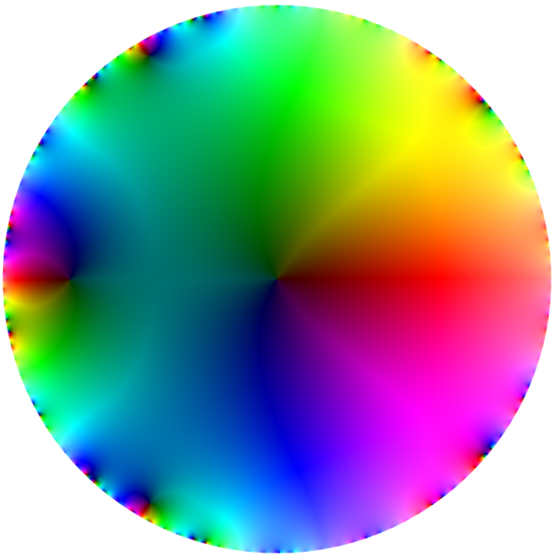

Abbildung 1: Die Partialsumme der ersten 50 Glieder für die Reihe aus **(a)**.