# Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 9

*The traditional mathematics professor of the popular legend is absentminded. He usually appears in public with a lost umbrella in each hand. He prefers to face the blackboard and to turn his back on the class. He writes a, he says b, he means c; but it should be d. Some of his sayings are handed down from generation to generation.*
*"In order to solve this differential equation you look at it till a solution occurs to you."*
[...] *After all, you can learn something from this traditional mathematics professor. Let us hope that the mathematics teacher from whom you cannot learn anything will not become traditional.*

*(George Pólya (1887 - 1985) in "How to Solve It")*

**Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung**

**9.1. (a)** Eine Differentialgleichung der Form

$$y' + p(x)\, y + q(x)\, y^\alpha = 0$$

mit $\alpha \notin \{0,1\}$ wird als *Bernoullische Differentialgleichung*[1] bezeichnet. Zeigen Sie, dass diese mit Hilfe der Substitution

$$z = y^{1-\alpha}$$

in eine lineare Gleichung überführt werden kann. Finden Sie auf diese Weise auch die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y' - y + xy^2 = 0.$$

**(b)** Eine Differentialgleichung der Form

$$y' + p(x)\, y + q(x)\, y^2 = r(x)$$

mit $r \not\equiv 0$ wird als *Riccatische Differentialgleichung*[2] bezeichnet. Angenommen wir kennen eine spezielle Lösung $u(x)$ dieser Gleichung, so zeigen Sie, dass man mit Hilfe der Substitution

$$y = u(x) + v(x)$$

wieder eine Bernoullische Differentialgleichung erhält. Finden Sie auf diese Weise auch die allgemeine Lösung der Gleichung

$$y' + 2\left(1 - \frac{1}{x}\right) y - \frac{1}{x}\, y^2 = x - 1.$$

[1] Nach Jakob I. Bernoulli (1654-1705), nicht zu verwechseln mit Johann Bernoulli (1667-1748) aus der Regel von Bernoulli-de l'Hôpital oder mit Daniel Bernoulli (1700-1782, Bernoulligleichung aus der Strömungsmechanik) sowie vielen weiteren Bernoullis.
[2] Jacopo Francesco Riccati (1676-1754), hier ist die Situation einfacher.

**9.2.** Eine rotationssymmetrische Säule mit Kopfradius $r_0$ bestehe aus einem homogenen Material mit konstanter Dichte $\rho$ und trage eine Last von $G_0$ kg. Wie muss das Säulenprofil beschaffen sein, dass in jeder Höhe der gleiche Flächendruck lastet?
(*Zwischenergebnis für die Differentialgleichung:* Das Profil $r(x)$ lässt sich z.B. aus der Gleichung

$$\frac{G_0 + \rho\pi \int_0^x r^2(t)\,dt}{\pi\, r^2(x)} = \frac{G_0}{\pi\, r_0^2}$$

bestimmen. Die Strecke $x$ wird dabei ausgehend vom Kopf der Säule nach unten gemessen.)

## Votieraufgaben

**9.3.** Wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$f(x,y) + g(x,y)\,y' = 0 \tag{1}$$

mit stetig partiell differenzierbaren $f$ und $g$.

**(a)** Angenommen der Ausdruck

$$A(x) := \frac{1}{g}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

hängt nur von $x$ ab, so zeigen Sie, dass

$$M(x) := \exp\left(\int A(x)\,dx\right)$$

ein integrierender Faktor der Differentialgleichung (1) ist. Zeigen Sie genauso: Hängt

$$B(y) := \frac{1}{f}\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right)$$

nur von $y$ ab, so ist

$$M(y) := \exp\left(-\int B(y)\,dy\right)$$

ein integrierender Faktor von (1).

**(b)** Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$xy^2 + y - xy' = 0.$$

**9.4.** Zu einem bestimmten Zeitpunkt befinden Sie sich im Ursprung eines Koordinatensystems, in den beiden Punkten $(\pm 1, 0)$ steht jeweils ein Velociraptor aus der Gattung der Theropoder. Beide Raptoren sind hungrig und kennen keine Angst. Sie versuchen daher in Richtung der positiven $y$-Achse zu fliehen. Die einzig wichtige Frage ist nun wie lange Sie überleben (vgl. auch `http://xkcd.com/135`).
Da Velociraptoren nur bedingt intelligent sind werden sie Sie, anstelle Ihnen einfach den Weg abzuschneiden, stets entlang der direkten Verbindung verfolgen[3]. Vereinfacht gehen wir davon aus, dass sich sowohl Sie als auch die Raptoren mit konstanten Geschwindigkeiten bewegen, optimistischerweise nehmen wir dabei an, dass die beiden Velociraptoren lediglich doppelt so schnell sind wie Sie.

[3] Ehrlich gesagt müssen sich die Velociraptoren nichts besseres überlegen, sie bekommen Sie ohnehin...

**(a)** Aufgrund der Symmetrie des Problems genügt es einen der beiden Velociraptoren zu betrachten, wir wählen z.B. denjenigen in $(1, 0)$. Zeigen Sie, dass die Bahnkurve des Velociraptors durch eine Funktion $x \mapsto y(x)$ gegeben ist, welche die Differentialgleichung

$$x\, y'' = \frac{1}{2}\sqrt{1 + (y')^2}$$

mit den Anfangsbedingungen $y(1) = y'(1) = 0$ erfüllt.
(*Hinweis:* Bewegt sich ein Punkt mit konstanter Geschwidigkeit auf dem Graphen einer Funktion $x \mapsto y(x)$, so zeigen Sie, dass

$$v = |\dot{x}|\sqrt{1 + (y')^2}$$

gilt. $\dot{x}$ ist dabei die Ableitung $dx/dt$, wenn $t \mapsto (x(t), y(t))$ die Kurve in der entsprechenden Geschwindigkeit parametrisiert.)

**(b)** Wie lange überleben Sie?

**(c)** Wer möchte kann gerne auch die zweite Aufgabe aus `http://xkcd.com/135` lösen.

## Zusatzaufgaben

**9.5.** Die Lösungen einer Gleichung $F_C(x, y) = 0$ bilden in der Regel eine *Kurvenschar*. Ist eine solche Kurvenschar gegeben, so können wir nach einer weiteren Kurvenschar fragen, welche stets orthogonal schneidet. Eine solche Kurvenschar bezeichnet man als *orthogonale Trajektorie.* Ergibt sich eine Kurvenschar als Lösung einer Differentialgleichung $y' = f(x, y)$, so erhält man die orthogonale Trajektrie mit $\tilde{F}_{\tilde{C}}(\xi, \eta) = 0$ als Lösung von

$$-\frac{1}{\eta'} = f(\xi, \eta),$$

d.h. in der Differentialgleichung muss man jediglich $x$ durch $\xi$, $y$ durch $\eta$ und $y'$ durch $-1/\eta'$ ersetzen (Warum eigentlich[4]?).

**(a)** Gegeben ist eine Schar von Parabeln

$$F_C(x, y) = y^2 - Cx = 0.$$

Bestimmen Sie die orthogonalen Trajektorien. Zeichnen Sie auch exemplarisch ein paar Vertreter beider Kurvenscharen.

**(b)** Gegeben Sei eine Schar von Kreisen

$$x^2 + (y - C)^2 = a^2 + C^2$$

mit Mittelpunkten auf der $y$-Achse durch die Punkte $(\pm a, 0)$. Bestimmen Sie wieder die orthogonale Trajektorie.

[4]Stillschweigend haben wir dabei vorausgesetzt, dass sich die Lösungen tatsächlich als Kurven $y = y(x)$ darstellen lassen und es keine Punkte mit horizontaler oder vertikaler Tangente gibt. In der Regel gilt diese Annahme nur Stückweise, anhand folgender Teilaufgaben merkt man aber wie dies zu verstehen ist.