Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 10

A good mathematical joke[1] *is better, and better mathematics, than a dozen mediocre papers.*
(John Edensor Littlewood, 1885 - 1977)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

10.1. Für eine beliebige $(n \times n)$-Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (oder $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$) definieren wir das *Matrixexponential* durch

$$\mathrm{e}^A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

Hierbei ist $A^0 = E_n$ die $(n \times n)$-Einheitsmatrix.

(a) Zeigen Sie, dass obige Reihe tatsächlich für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ konvergiert. Wählen Sie dazu auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ zunächst eine beliebige Norm $||\cdot||$ und zeigen Sie die Konvergenz in $(\mathbb{R}^{n\times n}, ||\cdot||)$. Warum hängt der Konvergenzbegriff in $\mathbb{R}^{n\times n}$ nicht von der konkret gewählten Norm ab?

(b) Angenommen es ist $AB = BA$, so zeigen Sie, dass

$$\mathrm{e}^A \cdot \mathrm{e}^B = \mathrm{e}^{A+B}.$$

Finden sie desweiteren ein Beispiel welches zeigt, dass die Formel für nichtkommutative Matrizen, d.h. $AB \neq BA$ i.A. falsch ist.

(c) Berechnen Sie die (Fréchet-) Ableitung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad x \mapsto f(x) = \mathrm{e}^{x\cdot A}$$

und schließen Sie daraus, dass

$$y(x) = \mathrm{e}^{xA}\, y_0$$

die Lösung des Anfangswertproblems $y'(x) = A\, y(x)$ mit $y(0) = y_0$ ist.

(d) Finden Sie ein Fundamentalsystem von $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(*Hinweis:* Verwenden Sie Bemerkung 4.15 aus der Vorlesung.)

[1] Why do Mathematicians confuse Halloween with Christmas? Because OCT 31 = DEC 25.

Votieraufgaben

10.2. Wenn der erste Schnee gefallen ist, wird es Zeit für die alljährliche Schneeballschlacht zwischen den Tutoren der Analysis I und Analysis III. Letztere sind zwar zahlenmäßig unterlegen, verfügen aber in qualitativer Hinsicht über das bessere Material.[2] Gemäß dem Reglement scheidet ein Tutor aus, wenn er von einem Schneeball getroffen wurde, die Mannschaft, welche am Ende überlebt, hat gewonnen.
Beide Armeen dezimieren sich dabei so gut, wie sie können, wenn auch mit schwindenden Kräften. Vereinfacht wollen wir annehmen, dass die Änderungsraten jeweils proportional zur Anzahl der noch vorhandenen Tutoren in der gegnerischen Mannschaft sind, d.h. wir modelieren die Schneeballschlacht mit Hilfe des Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} \dot{A}_1(t) &= \alpha A_3(t) \\ \dot{A}_3(t) &= \beta A_1(t). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnen $A_1(t)$ bzw. $A_3(t)$ die Anzahlen der noch verbliebenen Tutoren zum Zeitpunkt $t \geq 0$, $A_1(0) = 11$ bzw. $A_3(0) = 4$ sind die diesjährigen Tutorenzahlen zu Beginn der Schlacht. $\alpha, \beta < 0$ seien reelle Konstanten, welche die Schlagkraft der Mannschaften wiedergeben.

(a) Untersuchen Sie den Ausgang der Schlacht in Abhängigkeit von α und β.

(b) Die Erfahrung hat gezeigt, dass $\alpha = -9$ und $\beta = -1$ ein guter Ansatz ist. Um der drohenden Niederlage entgegenzuwirken, beginnt der Assistent der Analysis I Erstsemesterstudenten als Kanonenfutter zu rekrutieren. Dies tut er umso eifriger, je weniger Kräfte ihm noch zur Verfügung stehen und unser Differentialgleichungssystem ändert sich zu

$$\begin{aligned} \dot{A}_1(t) &= -9A_3(t) + 8(A_1(0) - A_1(t)) \\ \dot{A}_3(t) &= -A_1(t). \end{aligned}$$

Bestimmen Sie nun die Lösung dieses Systems.
(*Hinweis:* Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems kann man direkt sehen, setzen Sie dazu beispielsweise $A_1(t) = 0$.)

10.3. **(a)** Wir betrachten eine homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung, d.h. eine Gleichung der Form

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0.$$

Angenommen u ist eine Lösung dieser Gleichung, so substituieren wir $y(x) = c(x)\, u(x)$. Zeigen Sie, dass wir auf diese Weise für $z = c'$ eine Gleichung in getrennten Variablen erhalten, d.h. eine homogene Differentialgleichung erster Ordnung.
(*Anmerkung:* Dieses Verfahren funktioniert allgemeiner. Ist eine Lösung einer Differentialgleichung n-ter Ordnung bekannt, so erhält man auf diese Weise eine Gleichung $n-1$-ter Ordnung.)

(b) Zeigen Sie, dass die Differentialgleichung

$$x\, y'' - (x+1)\, y' - 2(x-1)\, y = 0$$

auf jedem Intervall $[\varepsilon, C]$ mit $0 < \varepsilon < C < \infty$ ein Fundamentalsystem bestehend aus genau zwei Lösungen besitzt.

[2] Außerdem sind sie noch vom Vorjahr trainiert und haben den strategisch überlegeneren Assistenten als Anführer.

(c) Eine Lösung der Gleichung aus Teilaufgabe **(b)** ist $y_1(x) = \mathrm{e}^{2x}$. Verwenden Sie das Verfahren aus Teilaufgabe **(a)** um derene zweite Lösung zu bestimmen. Berechnen Sie auch die Wronskideterminante $W[y_1, y_2]$ und schließen Sie daraus, dass Sie tatsächlich ein Fundamentalsystem gefunden haben.

(d) Finden Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems

$$x\,y'' - (x+1)\,y' - 2(x-1)\,y = x^2.$$

Zusatzaufgaben

10.4. In dieser Aufgabe wollen wir uns mit Potenzreihenansätzen zur Lösung von Differentialgleichungen beschäftigen. Wir betrachten also Differentialgleichungen der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(z)\, f^{(k)}(z) = 0, \tag{1}$$

wobei die Koeffizieten $a_k(z)$ ganze Funktionen sein sollen. Entscheidend für die Lösungsansätze ist dabei die Frage, ob der führende Koeffizient a_n in einem Punkt eine Nullstelle besitzt oder nicht (der Einfachheit halber betrachten wir nur $z_0 = 0$ als potentielle Nullstelle).

(a) Angenommen es ist $a_n(0) \neq 0$, so kann man zeigen, dass die Lösungen von (1) in einer (kreisförmigen) Umgebung von $z_0 = 0$ holomorph sind, d.h. man erhält die Lösungen über einen einfachen Potenzreihenansatz

$$f(z) = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l\, z^l.$$

Dabei gibt es stets genau n linear unabhängige Lösungen. Setzen Sie den Ansatz in die *Airysche Differentialgleichung*

$$f''(z) - z\, f(z) = 0$$

ein und finden Sie die Potenzreihendarstellungen der Lösungen mittels Koeffizientenvergleich.

(b) Angenommen a_n besitzt in $z_0 = 0$ eine n-fache Nullstelle, so genügt ein einfacher Potenzreihenansatz nicht mehr. Im folgenden betrachten wir nur noch den Fall $n = 2$, die entsprechenden Aussagen lassen sich aber ohne Weiteres verallgemeinern. Neben den Nullstellen von a_n spielt auch das Verhalten der Koeffizientenfunktionen a_k mit $k < n$ eine Rolle, d.h. wir betrachten Differentialgleichungen der Form

$$z^2\, f''(z) + z a_1(z)\, f'(z) + a_0(z) = 0. \tag{2}$$

Für solche Gleichungen kann man zeigen, dass es ein $r \in \mathbb{C}$ und eine Lösung f gibt, sodass $z^{-r}\, f(z)$ holomorph in einer Umgebung von $z_0 = 0$ ist und in $z_0 = 0$ keine Nullstelle besitzt. D.h. wir haben für f einen Ansatz der Form

$$f(z) = z^r \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l\, z^l$$

mit $\alpha_0 \neq 0$. Einsetzten in (2) liefert nach kurzer Rechnung für r die *Indikatorgleichung*

$$r(r-1) + a_1(0)\, r + a_0(0) = 0. \tag{3}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist aber ein Polynom in r, welches vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Ist r nun eine Lösung dieser Gleichung so kann man (unter Voraussetzungen an die restlichen Lösungen) die Koeffizieten in der Reihendarstellung von f rekursiv bestimmen. Dabei sind zwei Fälle zu unterscheiden: Bezeichnen r_1 und r_2 die beiden Lösungen von (3), wobei $\operatorname{Re} r_1 \geq \operatorname{Re} r_2$, dann gibt es falls

- $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ zwei Lösungen der Form

$$f_1(z) = z^{r_1} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \, z^l, \qquad f_2(z) = z^{r_2} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \, z^l$$

  wobei $\alpha_0 = 1$ und falls

- $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$ zwei Lösungen der Form

$$f_1(z) = z^{r_1} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \, z^l, \qquad f_2(z) = z^{r_2} \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l \, z^l + C \cdot \ln(z) \, f_1(z).$$

Verwenden Sie diese Ansätze um die Gleichungen

$$\text{(i)} \quad z^2 f'' + \tfrac{3}{2} z f' + z f = 0 \qquad\qquad \text{(ii)} \quad z^2 f'' + 7z f' + 9 f = 0$$

zu lösen.