Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 11

In my experience most mathematicians are intellectually lazy
and especially dislike reading experimental papers.
(Francis Harry Compton Crick, 1916 - 2004, Physiker und Biochemiker)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

11.1. **(a)** Seien I ein Intervall und $y_1, y_2 : I \to \mathbb{R}$ zwei stetig differenzierbare Funktionen, wobei $y_1(t) > 0$ für alle $t \in I$. Zeigen Sie, dass y_1 und y_2 genau dann linear abhängig sind, wenn die Wronskideterminante $W[y_1, y_2]$ auf I verschwindet.

(b) Wir definieren $y_1, y_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$y_1(t) = \begin{cases} t^2 & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0; \end{cases} \qquad \text{bzw.} \qquad y_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \geq 0, \\ t^2 & \text{für } t < 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $W[y_1, y_2](t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, y_1 und y_2 aber linear unabhängig sind.

(c) Wie verhält sich dies zur Aussage aus der Vorlesung?

11.2. Zeigen Sie: Sind y_1, y_2 Lösungen von

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0,$$

$x \in \mathbb{R}$, so erfüllt deren Wronskideterminante $W[y_1, y_2]$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ die Gleichung

$$W[y_1, y_2](x) = W[y_1, y_2](x_0) \cdot \exp\left(- \int_{x_0}^{x} p(\xi)\, dx \right).$$

(*Anmerkung:* Allgemeiner gilt im Fall von

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} p_k(x)\, y^{(k)} = 0 \tag{1}$$

die Gleichung

$$W[y_1, \ldots, y_n](x) = W[y_1, \ldots, y_n](x_0) \cdot \exp\left(- \int_{x_0}^{x} p_{n-1}(\xi)\, dx \right),$$

wobei $y_1, \ldots, y_n$ Lösungen von (1) sind.)

Votieraufgaben

11.3. Lernen Sie auf die Scheinklausur und stellen Sie ihrem Tutor mindestens eine inhaltliche Frage zum Stoff der Vorlesung.
(*Hinweis:* Sie votieren diese Aufgabe, indem Sie Ihrem Tutor eine entsprechnde Frage stellen. Bei einer nichttrivialen Frage (der Tutor entscheidet) kann jemand die Antwort dieser Frage an der Tafel “vorrechnen”.)

11.4. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems $y' = Ay + b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ e^{3t} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zusatzaufgaben

11.5. In dieser Aufgabe wollen wir uns mit dem *Räuber-Beute-Modell* nach Lotka[1] und Volterra[2] beschäftigen. Gegeben ist beispielsweise eine Population von Hasen, welche sich ohne Anwesenheit weiterer Jäger exponentiell vermehren würde, d.h. ihre Anzahl x sich gemäß

$$\dot{x}(t) = \alpha_1 \cdot x(t)$$

mit einem konstanten Wachstumsfaktor $\alpha_1 > 0$ entwickeln würde. Gibt es nun eine weitere Population von z.B. Füchsen, welche sich der Einfachheit halber allein von Hasen ernährt, so wird der Bestand in dem Maße dezimiert, je häufiger Füchse und Hasen aufeinandertreffen. Vereinfacht nehmen wir dabei an, dass die Abnahme der Hasenpopulation proportional zum Produkt xy ist, wenn y die Anzahl der Füchse bezeichnet. Zusammenfassend entwickelt sich die Populationszhal der Hasen also gemäß

$$\dot{x}(t) = \alpha_1\, x(t) - \beta_1\, x(t)y(t),$$

wobei $\alpha_1, \beta_1 > 0$. Betrachten wir umgekehrt die Anzahl der Füchse, so führen analoge Annahmen zum Wachstumsgesetz

$$\dot{y}(t) = -\alpha_2\, y(t) + \beta_2\, x(t)y(t)$$

mit $\alpha_2, \beta_2 > 0$. Der erste Summand der rechten Seite beschreibt dabei eine exponentielle Abnahme des Fuchsbestandes ohne Anwesenheit der Hasen, der zweite Summand entsprechend den Zuwachs proportional zum Produkt xy der Populationszahlen.
Aufgrund des Produkttermes ist unser Differentialgleichungssystem nun *nichtlinear*, explizite Lösungen also nicht unbedingt zu erwarten. Interessieren uns konkrete Popultationszahlen zu einem gegebenen Zeitpunkt, so lässt sich das Anfangswertproblem, wenn wir die Anfangsbestände $x(0) = x_0$ und $y(0) = y_0$ hinzunehmen, nur numerisch lösen (z.B. mit dem Verfahren von Runge-Kutta). Nichtsdestotrotz erlaubt es eine analytische Betrachtung dieses Systems Aussagen über das Verhalten der Lösungen zu treffen und somit beobachtbare Effekte in der Natur zu verstehen. Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bleibt dabei durch den Existenz und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf gesichert.

(a) Zunächst stellt sich die Frage, ob es *stationäre Lösungen* gibt, d.h. ob Popultationszahlen $\xi, \eta > 0$ existieren, sodass

$$x(t) = \xi, \qquad y(t) = \eta$$

für alle $t \geq 0$ gelten. Finden Sie die stationären Lösungen des obigen Differentialgleichungssystems. Zeigen Sie ferner: Ist $\dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0$ für ein $t_0 > 0$, so ist $x(t) = \xi$ und $y(t) = \eta$ die Lösung des Systems für alle $t \geq t_0$.

Angenommen x und y sind Lösungen eines Differentialgleichungssystems, so können wir die Abbildung

$$t \mapsto (x(t), y(t))$$

betrachten. Diese parametrisiert dann eine Kurve im *Phasenraum*, hier dem $\mathbb{R}^2$. Ein generelles Vorgehen bei der Behandlung nichtlinearer Systeme ist es nun aus geometrischen Eigenschaften dieser Kurven auf analytische Eigenschaften der Lösungen x und y zu schließen.

[1] Alfred James Lotka, 1880 - 1949, Chemiker und Versicherungsmathematiker.
[2] Vito Volterra, 1860 - 1940, Mathematiker und Physiker.

(b) Nach Teilaufgabe **(a)** erfüllt jede nichtstationäre Lösung die Bedingung $\dot{x}(t) \neq 0$ oder $\dot{y}(t) \neq 0$ für alle $t \geq 0$. Angenommen es ist $\dot{x}(t) \neq 0$ so existiert eine auflösende Funktion $y(x)$. Zeigen Sie, dass deren Ableitung durch

$$y'(x) = \frac{y}{\alpha_1 - \beta_1 y} \frac{\beta_2 x - \alpha_2}{x}$$

gegeben ist und die Lösung dieser Differentialgleichung

$$\alpha_1 \ln y - \beta_1 y + \alpha_2 \ln x - \beta_2 x = c$$

mit $c \in \mathbb{R}$ bzw.

$$\frac{y^{\alpha_1}}{\mathrm{e}^{\beta_1 y}} \frac{x^{\alpha_2}}{\mathrm{e}^{\beta_2 x}} = C \tag{2}$$

mit $C \in \mathbb{R}$ erfüllt.

(c) Wir schreiben die letzte Gleichung (2) in der Form

$$f(y) \cdot g(x) = C \tag{3}$$

mit $f(y) = y^{\alpha_1}\mathrm{e}^{-\beta_1 y}$ und $g(x) = x^{\alpha_2}\mathrm{e}^{-\beta_2 x}$. Führen Sie nun eine Kurvendiskussion von f und g durch um zu zeigen, dass die durch $t \mapsto (x(t), y(t))$ parametrisierte Kurve geschlossen ist.
Die Populationszahlen unser Hasen und Füchse sind damit oszillierend und wiederholen sich nach einer gewissen Periodendauer. Diesen Effekt kennt man in der Biologie als die *Erste Lotka-Volterra-Regel*.
(*Vorgehen:* Schreiben Sie (3) zunächst als $f(y)g(x) = \mu M_f$ mit $0 < \mu < M_g$, wobei M_f und M_g die Maxima von f bzw. g bezeichnet und untersuchen Sie die Gleichungen $g(x) = \mu$ bzw. $f(y) = \mu M_f / g(x)$.)

(d) In Teilaufgabe **(c)** haben wir gesehen, dass die Lösungen x und y eine gemeinsame Periodendauer T haben. Die Mittelwerte der Popultaionen über lange Zeiten lassen sich also nach

$$\overline{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt, \qquad \overline{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\,dt$$

berechnen. Zeigen Sie, dass man für x den Mittelwert

$$\overline{x} = \frac{\beta_2}{\alpha_2}$$

erhält (entsprechendes folgt natürlich auch für y).
Langfristig betrachtet bleiben die Populationszahlen der Hasen und Füchse also konstant, bzw. die Füchse allein sind nicht in der Lage die Hasen völlig auszurotten. Diesen Effekt kennt man in der Biologie als die *Zweite Lotka-Volterra-Regel*.

(e) Wir wollen nun einen weiteren Umwelteinfluss (z.B. Mensch) betrachten. Aus dem Fell der Füchse lassen sich nicht unbedingt schöne aber warme Mäntel fertigen, Hasen schmecken in Weißwein gekocht unheimlich gut. Daher werden beide Populationen gejagt und das Differentialgleichungssystem ändert sich zu

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha_1\, x(t) - \beta_1\, x(t)y(t) - \gamma_1\, x(t),\\ \dot{y}(t) &= -\alpha_2\, y(t) + \beta_2\, x(t)y(t) - \gamma_2\, y(t).\end{aligned}$$

Die Konstanten $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ geben dabei unser Jagdglück hinsichtlich der unterschiedlichen Tiere wieder. Berechnen Sie nun die neuen Mittelwerte $\overline{x}$ und $\overline{y}$. Was fällt auf?