Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 12

Everyone knows what a curve is, until he has studied enough mathematics to become confused through the countless number of possible exceptions.
(Felix Klein, 1849 - 1925)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

12.1. Für eine auf der positiven Halbachse definierte Funktion $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ betrachten wir das Feld

$$F(x,y,z) = f(r) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Zeigen Sie, dass für das Wegintegral $\Phi(\gamma_0, \gamma_1)$ entlang einer beliebigen Kurve $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ mit $\gamma_0 = |\gamma(0)|$ und $\gamma_1 = |\gamma(1)|$ der Ausdruck

$$\Phi(\gamma_0, \gamma_1) = \frac{1}{2} \int_{\gamma_0^2}^{\gamma_1^2} f(\sqrt{u})\, du$$

folgt. Schließen sie insbesondere für das Gravitationsfeld mit $f(r) = 1/r^3$ den Ausdruck

$$\Phi(\gamma_0, \gamma_1) = \frac{1}{\gamma_0} - \frac{1}{\gamma_1}.$$

12.2. Für $(x,y,z) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei das Vektorfeld

$$F(x,y,z) = r^{-3} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ gegeben.

(a) Berechnen Sie den Fluss von F durch die Kugeloberfläche

$$\mathbb{S}^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

(b) Der zweidimensionale Torus $\mathbb{T}$ mit den Radien $a < b$ lässt sich durch

$$(\psi, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} (b + a\cos\psi)\cos\varphi \\ (b + a\cos\psi)\sin\varphi \\ a\sin\psi \end{pmatrix}$$

parametrisieren. Berechnen Sie den Fluss von F durch die Torusoberfläche.

Votieraufgaben

12.3. **(a)** Bezeichne $M \in \mathbb{N}$ Ihre Matrikelnummer und sei $n = M \mod 3$. Zeigen Sie Identität (n):

$$\operatorname{rot}(fA) = f \operatorname{rot} A - A \times \operatorname{grad} f, \tag{0}$$
$$\operatorname{div}(fA) = A \cdot \operatorname{grad} f + f \operatorname{div} A, \tag{1}$$
$$\operatorname{div}(A \times B) = B \cdot \operatorname{rot} A - A \cdot \operatorname{rot} B, \tag{2}$$

wobei f eine skalare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und $A, B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ differenzierbare Vektorfelder bezeichnen.

(b) Zeigen Sie die beiden Identitäten

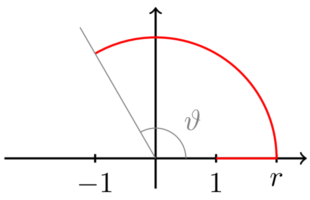
$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = 0, \qquad \operatorname{div} \operatorname{rot} A = 0$$

für hinreichend glatte skalare Funktionen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, bzw. Vektorfelder $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

12.4. Wir betrachten das Vektorfeld

$$W : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \mapsto \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

(a) Berechnen Sie das Wegintegral entlag des in der Abbildung angegebenen Weges:

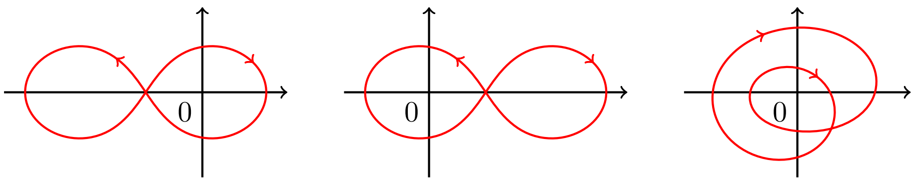


Sei γ nun ein Weg mit Anfangs- und Endpunkt auf der positiven Halbachse $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = 0\}$ welcher den Punkt $(0, 0)$ nicht trifft. Warum ist das Wegintegral

$$N(\gamma) := \frac{1}{2\pi} \int_\gamma W \, ds$$

ganzzahlig? Man nennt $N(\gamma)$ die Windungszahl von γ um $(0, 0)$. Wie würden Sie die Windungszahl um einen beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ definieren?

(b) Bestimmen Sie die Windungszahlen der folgenden Kurven um $(0, 0)$:



(c) Für eine skalare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ welche auf einer Umgebung von $(0, 0)$ stetig ist definieren wir das Vektorfeld

$$W_f(x, y) = f(x, y) \cdot W(x, y).$$

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} W_f \, ds = 2\pi \cdot f(0, 0)$$

gilt, wobei γ_ε den Kreis um $(0, 0)$ mit Radius $\varepsilon > 0$ parametrisiert.

(d) Was hat das alles mit dem Kapitel Funktionentheorie zu tun?

Zusatzaufgaben

12.5. Sei $A : D \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$. Man nennt eine skalare Funktion $\varphi : D \to \mathbb{R}$ ein *Potential*[1] von A, falls sich A auf D als

$$A = \operatorname{grad} \varphi$$

schreiben lässt.

(a) Angenommen A besitzt ein zweifach stetig differenzierbares Potential, so zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$$

für $i, j = 1, \ldots, n$ gilt. A_i bezeichnet dabei die i-te Komponente von A. Was bedeutet diese Aussage für $n = 3$?

(b) Zeigen Sie, dass ein stetiges Vektorfeld A genau dann ein Potential besitzt, wenn das Wegintegral entlang jeder geschlossenen stückweise glatten Kurve $\gamma \subset D$ verschwindet.

(c) Besitzt das Vektorfeld

$$W : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \mapsto \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

ein Potential?

[1] Z.B. besitzt das elektrische Feld $E(x, y, z) = r^{-3}(x, y, z)^T$ mit $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ das Potential $\varphi = r^{-1}$.