Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
M.Sc. Jan Köllner
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 13

The Arnold Principle:
If a notion bears a personal name, then this name is not the name of the discoverer.[1]

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

13.1. Skizzieren Sie die durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} 4\cos t - \cos(4t) \\ 4\sin t - \sin(4t) \end{pmatrix}$$

parametrisierte Kurve und berechnen Sie den umschlossenen Flächeninhalt.

13.2. Nachträglich ergänzte zusätzliche Voraussetzung: D muss zusammenhängend und Jordan-messbar sein.

(a) Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in D$ mit der Eigenschaft, dass

$$\int_D f(x)\, dx = f(\xi) \cdot |D|$$

gibt. Hierbei bezeichnet $|D|$ das Volumen (bzw. den Flächeninhalt) von D.

(b) Sei nun zusätzlich $g : D \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in D$ mit der Eigenschaft, dass

$$g(\xi) \cdot \int_D f(x)\, dx = f(\xi) \cdot \int_D g(x)\, dx$$

gibt.

(c) Seien nun $D \subset \mathbb{R}^3$ kompakt mit glattem Rand und $A, B : D \to \mathbb{R}^3$ glatte Vektorfelder. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{div} A(\xi) \cdot \int_{\partial D} B \cdot n\, d\sigma = \operatorname{div} B(\xi) \cdot \int_{\partial D} A \cdot n\, d\sigma$$

für ein $\xi \in D$ gilt.

Votieraufgaben

13.3. Sei $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein glattes Vektorfeld.

(a) Um einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ denken wir uns eine kleine Kugel $K(x_0)$ mit Radius $d > 0$. Das Volumen dieser Kugel bezeichnen wir mit $|K(x_0)|$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{div} A(x_0) = \lim_{d \to 0} \frac{1}{|K(x_0)|} \int_{\partial K(x_0)} A \cdot n\, d\sigma.$$

Welche anschauliche Interpretation der Divergenz ergibt sich aus diesem Zusammenhang?

[1] The Berry Principle: The Arnold Principle is applicable to itself.

(b) Um einen Punkt $x_0 \in \mathbb{R}^3$ denken wir uns eine kleine, orthogonal zur i-ten Koordinatenachse orientierte, Kreisscheibe $S_i(x_0)$ mit Radius $d > 0$. D.h. es ist

$$S_i(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, (x - x_0) \cdot e_i = 0 \,\wedge |x - x_0| \leq d\},$$

wobei e_i den Richtungsvektor der i-ten Koordinatenachse bezeichnet. Den Flächeninhalt dieser Scheibe bezeichnen wir mit $|S_i(x_0)|$. Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{rot} A(x_0) \cdot e_i = \lim_{d \to 0} \frac{1}{|S_i(x_0)|} \int_{\partial S_i(x_0)} A \cdot T \, ds.$$

Welche anschauliche Interpretation der Rotation ergibt sich aus diesem Zusammenhang?

(c) Formulieren Sie eine analoge Aussage für den Gradienten.

13.4. Auf der offenen Menge

$$G := \{(x, y) \,:\, x, y > 0 \,\wedge\, x^2 + y^2 < 1\}$$

definieren wir das Vektorfeld

$$A(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

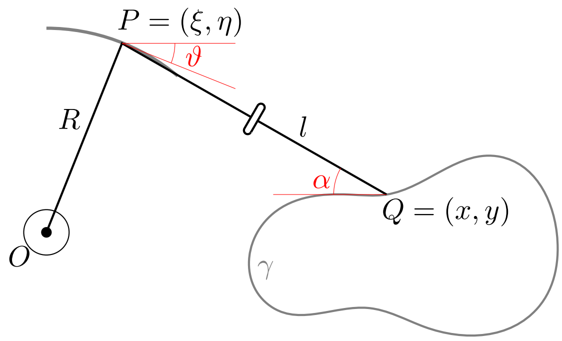
Berechnen Sie die beiden Integrale

$$\int_{\partial G} A \cdot n \, ds, \qquad \int_G \operatorname{div} A \, dx.$$

Prüfen Sie den Satz von Gauß-Ostrogradski. Wo liegt hier der Fehler?

Zusatzaufgaben

13.5. Ein Polarplanimeter (vgl. Skizze) besteht aus einem festen Pol (der Einfachheit halber mit den Koordinaten $O = (0,0)$), einem Polararm, welcher zu einem Gelenk (bei $P = (\xi, \eta)$) führt. Vom Gelenk ausgehend führt der Fahrarm zu einem Zeiger (bei $Q = (x, y)$), zwischen Gelenk und Zeiger ist ein kleines Rädchen angebracht. Wird dieses Rädchen entlang seiner Drehachse bewegt verharrt es in Ruhe, bei Bewegungen orthogonal zur Achse beginnt es sich zu drehen. Durchläuft man mit dem Zeiger eine bestimmte Kurve (z.B. den Umriss eines Sees auf einer Landkarte), so erlaubt es dieses mechanisch primitive aber dennoch intelligent konzipierte Konstrukt den von der Kurve eingeschlossenen Flächeninhalt zu bestimmen. Dieser ist als Rollweg des Rädchens ablesbar.



(a) Durchläuft der Zeiger die durch $t \mapsto (x(t), y(t))$, $t \in [t_1, t_2]$ parametrisierte Kurve, so durchläuft der Punkt $P = (\xi(t), \eta(t))$ einen Kreisbogen. Die Flächeninhalte der eingeschlossenen Kurven sind durch

$$F = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (x\dot{y} - \dot{x}y)\, dt, \qquad 0 = \Phi = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} (\xi\dot{\eta} - \dot{\xi}\eta)\, dt$$

gegeben (vgl. Aufgabe 5.4 aus Analysis 2 oder Satz von Gauß-Ostrogradski). Zeigen Sie, dass

$$F - \Phi = l \int_{t_1}^{t_2} (\dot{\eta} \cos\alpha - \dot{\xi} \sin\alpha)\, dt, \tag{1}$$

wobei α den Neigungswinkel des Fahrarms bezeichnet.

(b) Der Rollweg des Rädchens setzt sich zusammen aus der orthogonalen Komponente der Verschiebung von P und einer Drehung um P. Bezeichne l' den Abstand von P zum Rädchen, dann ist der Anteil durch die Drehung gegeben durch $l'\alpha$. Zeigen Sie, dass die orthogonale Komponente der Verschiebung durch

$$R \sin(\vartheta - \alpha) = R(\cos\alpha \sin\vartheta - \sin\alpha \cos\vartheta)$$

gegeben ist. Hierbei bezeichnet ϑ den Winkel zwischen der Horizontalen und der Tangente an die Bahnkurve von P in P.

(c) Substituieren Sie $\xi(t) = -R \sin\vartheta(t)$ und $\eta = R\cos\vartheta(t)$ in (1) und schließen Sie auf die *Planimeterformel*

$$F = C \cdot (\rho(t_2) - \rho(t_1)),$$

wobei C eine von den Abmessungen des Planimeters abhängige Konstante ist und ρ den zurückgelegten Rollweg des Rädchens angibt.
(*Anmerkung:* In der Praxis bestimmt man C durch Ausmessen eines bekannten Flächeninhalts.)