Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 15

Why waste time learning, when ignorance is instantaneous?
(Hobbes, 1985 - 1995)

15.1. Welche der folgenden Mengen sind Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$?

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \{(t,t^2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \geq 0\} \cup \{(t,-t^2) \in \mathbb{R}^2 \,:\, t \leq 0\},\\
M_2 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x - y^2 = 0\},\\
M_3 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^3 - y^2 = 0\},\\
M_4 &:= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = |x|\},\\
M_5 &:= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}.
\end{aligned}$$

Geben Sie ggf. einen Atlas von Karten an.

15.2. Gegeben Sei die Abbildung

$$p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x,\lambda) \mapsto p(x,\lambda) := (x+a)x^2 + (x-a)\lambda^2$$

mit einem Parameter $a > 0$.

(a) Berechnen Sie für ein gegebenes $x \in \mathbb{R}$ die Nullstellen des Polynoms $p(x,\cdot)$ und überprüfen Sie mit dem Satz über implizite Funktionen in welchen Punkten $(x_0,\lambda_0) \in \mathbb{R}^2$ eine auflösende Funktion $x \mapsto \lambda(x)$ existiert.

(b) Welche der folgenden Mengen

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \{(x,\lambda) \in \mathbb{R}^2 \,:\, p(x,\lambda) = 0\},\\
M_2 &:= M_1 \setminus \{(0,0)\}
\end{aligned}$$

bilden eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$? Geben Sie ggf. einen Atlas von Karten an.

15.3. **(a)** Sei $D \subset \mathbb{R}^k$ und $f \in C^1(D,\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass die Menge aller *regulären Punkte*, d.h. die Menge aller Punkte in denen die Jacobi-Matrix vollen Rang hat, offen ist.

(b) Sei $f :]0,\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so dass $f^{-1}(0) \neq \emptyset$ und 0 regulärer Wert von f ist. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathcal{M} := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, f(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0\}$$

eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.
Wie entsteht $\mathcal{M}$ aus der eindimensionalen Mannigfaltigkeit $f^{-1}(0)$?

(c) Nutzen Sie Teilaufgabe **(b)** um zu zeigen, dass der Torus $\mathbb{T}$ aus Aufgabe **12.2 (b)** eine Mannigfaltigkeit ist.

15.4. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine k-dimensionale C^m-Untermannigfaltigkeit mit Karten $\Phi_j : B_1^{(k)}(0) \to U_j$, $j = 1, 2$, wobei $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ und $B_1^{(k)}(0) = \{x \in \mathbb{R}^k : |x| < 1\}$. Ziel dieser Aufgabe ist es zu Zeigen, dass

$$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : V_1 \to V_2$$

mit $V_j := \Phi_j^{-1}(U_1 \cap U_2)$ wieder ein C^m-Diffeomorphismus ist. Geometrisch beschreibt diese Abbildung einen Kartenwechsel von Φ_2 nach Φ_1.

(a) Zeigen Sie, dass V_j, $j = 1, 2$ offen in $\mathbb{R}^k$ und $\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1$ bijektiv ist.

(b) Zu einem Punkt $x \in U_1 \cap U_2$ wählen wir eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^n$ mit $U \cap M \subset U_1 \cap U_2$ und eine Abbildung

$$\varphi : B_1^{(k)}(0) \to U$$

und setzen

$$\varphi_j : W_j \to \mathbb{R}^k, \qquad \varphi_j = P_k \circ \varphi^{-1} \circ \Phi_j$$

$j = 1, 2$, wobei $W_j = \Phi_j^{-1}(U \cap M)$ und $P_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ die Projektion $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$ bezeichnen.
Zeigen Sie, dass

$$\operatorname{Rang} D\varphi_j(\xi) = k$$

für alle $\xi \in W_j$ ist und schließen Sie, dass φ_j ein C^m-Diffeomorphismus ist.

(c) Zeigen Sie, dass

$$(\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1)(\xi) = (\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1)(\xi)$$

für alle $\xi \in W_1$ gilt.

(d) Schließen Sie, dass

$$\Phi_2^{-1} \circ \Phi_1 : V_1 \to V_2$$

ein C^m-Diffeomorphismus ist.

15.5. Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine orientierbare Mannigfaltigkeit.

(a) Zeigen Sie, dass M mindestens zwei orientierte Atlanten besitzt.

(b) Seien $(\varphi_i, U_i)_{i \in I}$ und $(\psi_j, V_j)_{j \in J}$ zwei orientierte Atlanten. Wir definieren nun eine Abbildung $f : M \to \{\pm 1\}$ und setzen $f(x) = -1$, falls es zwei Karten (φ_i, U_i) und (ψ_j, V_j) mit $x \in U_i \cap V_j$ und $\det D(\varphi_i^{-1} \circ \psi_j)(\psi_j^{-1}(x)) < 0$ gibt. Im anderen Fall setzen wir $f(x) = 1$. Zeigen Sie, dass f stetig ist.

(c) Sei M nun wegzusammenhängend, d.h. zwei Punkte $x, y \in M$ lassen sich durch einen stetigen Weg

$$\gamma : [0, 1] \to M$$

mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$ miteinander verbinden. Zeigen Sie, dass M genau zwei Orientierungen besitzt.

15.6. **(a)** Schreiben wir die Einträge einer Matrix in einer fest vorgegebenen Reihenfolge untereinander, so können wir die Gruppe aller invertierbaren Matrizen $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ als n^2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n^2}$ auffassen. Warum? Ist diese Mannigfaltigkeit kompakt oder zusammenhängend?

(b) Zeigen Sie, dass auch $\mathrm{O}(2)$ und $\mathrm{SO}(2)$ Mannigfaltigkeiten bilden. Finden Sie deren Dimension und untersuchen Sie sie auf Kompaktheit und Zusammenhang.

15.7. **(a)** Die *projektive Ebene* $\mathbb{RP}^1$ ist die Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^2$, welche durch den Ursprung verlaufen. Jede dieser Geraden ist eindeutig durch einen Richtungsvektor (x, y) mit $|(x, y)| \neq 0$ gegeben, wobei linear abhängige Vektoren jeweils die gleiche Gerade definieren. Zeigen Sie, dass $\mathbb{RP}^1$ eine eindimensionale Mannigfaltigkeit ist und geben Sie einen Atlas bestehend aus zwei Karten an.
(*Bemerkung:* Man kann jeder Geraden einen Punkt auf dem Einheitshalbkreis zuordnen, wobei die Punkte an den Halbkreiskanten miteinander identifiziert werden. $\mathbb{RP}^1$ ist auf diese Weise homöomorph zu einem Kreis.)

(b) Die projektive Ebene $\mathbb{RP}^2$ ist entsprechend die Menge aller Geraden im $\mathbb{R}^3$, welche durch den Ursprung verlaufen. Zeigen Sie wieder, dass es sich hierbei um eine Mannigfaltigkeit handelt. Wie kann man $\mathbb{RP}^2$ basteln?

(c) Für Kopfschmerzen der besonderen Art: Wir betrachten die Menge aller möglicher Geraden im $\mathbb{R}^2$. Wie unterscheidet sich diese von $\mathbb{RP}^1$ bzw. $\mathbb{RP}^2$?