Analysis III (WS 2015/16) — Blatt 16

For successful education there must always be a certain freshness in the knowledge dealt with. It must be either new in itself or invested with some novelty of application to the new world of new times. ***Knowledge does not keep any better than fish.*** *You may be dealing with knowledge of the old species, with some old truth; but somehow it must come to the students, as it were, just drawn out of the sea and with the freshness of its immediate importance.*
(Alfred North Whitehead, 1861 - 1947, The Aims of Education)

Bemerkung: Folgende Aufgaben können zur Vorbereitung auf die Prüfungsklausur hilfreich sein. Der Schwierigkeitsgrad entspricht in etwa dem der Aufgaben in der Prüfung, allerdings muss man sich die direkte Abfrage von Definitionen, Sätzen und einfachen Beweisen hinzudenken. Der Leser ist eingeladen selbst entsprechende Aufgabenteile einzufügen.

16.1. Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f : G \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \neq 0$ für alle $z \in G$.

(a) Sei $z_0 \in G$ beliebig gewählt. Zeigen Sie, dass die Funktion h mit

$$h(z) = \int_{[z_0,z]} \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw$$

ebenfalls auf G holomorph ist und geben Sie die Ableitung von h an.

(b) Berechnen Sie die Ableitung von

$$z \mapsto \frac{\mathrm{e}^{h(z)}}{f(z)}$$

und schließen Sie, dass man für jede holomorphe, nullstellenfreie Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion $g : G \to \mathbb{C}$ findet, sodass

$$f(z) = \mathrm{e}^{g(z)}$$

für alle $z \in G$ erfüllt ist.

16.2. Seien p, q Polynome vom Grad m, n mit $n \geq m + 1$. q haben in $b_1, \ldots, b_n$ jeweils eine einfache Nullstelle. Integrieren Sie die Funktion f mit

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)(z-w)}, \qquad w \in \mathbb{C} \setminus \{b_1, \ldots, b_n\}$$

über einen hinreichend großen Kreis und zeigen Sie die Formel

$$\frac{p(w)}{q(w)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{p(b_k)}{q'(b_k)} \frac{1}{w - b_k}$$

zur Partialbruchzerlegung von p/q.

16.3. Warum ist $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} \right)$$

die einzige holomorphe Funktion für die

$$f(x) = \sin x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt?

16.4. Eine Funktion f sei holomorph auf einer Umgebung $K_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ mit $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r > 0$ und habe in z_0 einen Pol n-ter Ordnung. Welche Singularität hat f' in z_0. Berechnen Sie auch $\operatorname{Res}(f', z_0)$.

16.5. Wählen Sie aus den Vektoren

$$Y_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad Y_2(t) = \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}, \qquad Y_3(t) = \begin{pmatrix} 4\mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}, \qquad Y_4(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-2t} \\ \mathrm{e}^{-2t} \end{pmatrix}$$

ein Fundamentalsystem zum Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 4y_2, \\ y_2' &= y_1 - 3y_2 + 3\mathrm{e}^t. \end{aligned}$$

Berechnen Sie für Ihre Auswahl die Wronskideterminante und bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Problems.

16.6. Für ein gegebenes $k \in \mathbb{Z}$ betrachten wir das Anfangswertproblem

$$y'(t) = \frac{\cos y}{y^k}, \qquad y(0) = y_0 \neq 0.$$

(a) Für $y_0 = \pi/2$ besitzt das Anfangswertproblem offenbar die konstante Lösung $y(t) = \pi/2$. Verwenden Sie den Satz von Picard-Lindelöf um zu zeigen, dass diese die einzige Lösung ist.

(b) Begründen Sie, dass das Anfangswertproblem für jedes $y_0 \neq 0$ eine eindeutige Lösung besitzt.

16.7. Seien $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ und

$$A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(x,y,z) \\ y^2 + yz^2 \\ y^2 z \end{pmatrix}.$$

Desweiteren betrachten wir die Kurve, welche durch

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \qquad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

parametrisiert wird.

(a) Für welche $f \in C^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ ist A ein Gradientenfeld?

(b) Sei nun $f(x, y, z) = \cos x$. Finden Sie eine Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\nabla g = A$ und bestimmen Sie

$$\int_\gamma A \cdot T \, ds.$$

(c) Sei nun $f(x, y, z) = x^2 + y^2$. Bestimmen Sie

$$\int_\gamma A \cdot T \, ds.$$