Skript zu Puiseux-Reihen

Wollen wir z.B. die Nullstellen eines Polynoms in Abhängigkeit eines weiteren Parameters beschreiben, so können Effekte eintreten welche technische Schwierigkeiten verursachen. Beispielsweise können für einen gewissen Parameterwert alle Nullstellen in einem Punkt zusammenfallen, wird der Paramter leicht verschoben, so können diese sich in Zweige von einfachen Nullstellen aufspalten. Abgesehen davon hängen die Nullstellen "analytisch" vom Paramter ab und es liegt nahe die Nullstellen mit Hilfe geeigneter Reihen zu beschreiben. Hierfür eigenen sich *Puiseux-Reihen*, d.h. Potenzreihen in gebrochenen Potenzen $z^{n/k}$, also Reihen der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, z^{n/k}$$

für ein fest gewähltes $k \in \mathbb{N}$. Im folgenden finden Sie ein Exzerpt aus dem Vorlesungsskript zur Analysis III, welche Herr Lesky im Wintersemester 2012/13 gelesen hat.

Definition. Wir nennen eine Funktion $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *reell analytisch* in $x_0 \in]a, b[$, falls

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{n=k}^{\infty} a_n \, (x - x_0)^n \tag{1}$$

für alle $x \in]x_0 - r, x_0 + r[$ mit einem $r > 0$ und einer rellen Koeffizientenfolge $(a_n)_{n \geq k}$ mit $k \in \mathbb{N}$ und $a_k \neq 0$ erfüllt ist.

Satz. *Ist $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ in $x_0 \in]a, b[$ reell analytisch, so gibtes ein $\varepsilon > 0$, sodass die Einschränkungen*

$$f_+ := f\big|_{[x_0, x_0+\varepsilon[} \qquad \textit{und} \qquad f_- := f\big|_{]x_0-\varepsilon, x_0]}$$

beide injektiv sind und sich die inversen Abbildungen $f_\pm^{-1}$ als Puiseux-Reihen

$$f_\pm^{-1}(y) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n b_n \, |y - f(x_0)|^{n/k}$$

mit $y \in f_+([x_0, x_0 + \varepsilon[)$ bzw. $y \in f_-(]x_0 - \varepsilon, x_0])$ darstellen lassen. Der erste Koeffizient ergibt sich dabei aus

$$b_1 = |a_k|^{-1/k},$$

wobei a_k den ersten nichttrivialen Koeffizienten aus der Reihe in (1) *bezeichnet.*

Bevor wir uns dem Beweis dieser Aussage zuwenden, wollen wir den Inhalt dieses Satzes anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto c(x - x_0)^4$$

mit $c > 0$. Diese ist offensichtlich reell analytisch, da bereits als Potenzreihe gegeben. Die Einschränkungen von f auf die Halbachse $[x_0, \infty[$ ist injektiv und f ist auf $f([x_0, \infty[) = [0, \infty[$ invertierbar. Für die inverse Funktion erhalten wir

$$f_+^{-1} : [0, \infty[\to [x_0, \infty[, \qquad y \mapsto x_0 + \left(\tfrac{y}{c}\right)^{1/4}.$$

Genauso ist f eingeschränkt auf $]-\infty, x_0]$ injektiv und die inverse Funktion ist gegeben durch

$$f_-^{-1} : [0,\infty[\to]-\infty, x_0], \qquad y \mapsto x_0 - \left(\tfrac{y}{c}\right)^{1/4}.$$

Beide Zweige der Inversen sind also durch Puiseux-Reihen mit den entsprechenden Koeffizienten gegeben.

Im Folgenden wollen wir den Beweis des Satzes skizzieren, dabei werden wir uns vor allem auf die Idee des Beweises konzentrieren, technische Details sind selbständig zu vervollständigen.

Beweis: Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $a_k > 0$ gilt. Anstelle von f auf dem Intervall $]x_0 - r, x_0 + r[\subset]a, b[$ betrachten wir ihre analytische Fortsetzung auf die offene Kreisscheibe $K_r(x_0)$, d.h. für $z \in K_r(x_0)$ setzen wir

$$g(z) := \sum_{n=k}^{\infty} a_n \,(z - x_0)^n.$$

Da die so definierte homolmorphe Funktion eine k-fache Nullstelle in $x_0 \in]a, b[$ besitzt, existiert nach Satz 5.7 aus der Vorlesung ein $\varepsilon > 0$ und eine holomorphe Funktion h, sodass

$$g(z) = (h(z))^k$$

für alle $z \in K_\varepsilon(x_0)$ gilt. Diese Funktion h besitzt dann in x_0 die Ableitung $h'(x_0) = a_k^{1/k} \neq 0$ und ist daher nach Satz 5.9 aus der Vorlesung invertierbar. Zudem ist die Inverse h^{-1} wieder eine holomorphe Funktion, d.h. es existiert eine Potenzreihendarstellung

$$h^{-1}(z) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n.$$

Wir bemerken dabei, dass der erste Koeffizient dieser Reihendarstellung gerade durch

$$b_1 = a_k^{-1/k}$$

gegeben ist. Zusammenfassend folgt nun aus

$$y = f(x) = f(x_0) + g(x) = f(x_0) + (h(x))^k,$$

dass

$$x = f^{-1}(y) = h^{-1}((y - f(x_0))^{1/k}) = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\pm 1)^n b_n \,|y - f(x_0)|^{n/k}.$$

Der Faktor $(\pm 1)^n$ tritt dabei nach der Fallunterscheidung $x \gtrless x_0$ auf. $\square$