Höhere Analysis (SS 2016) — Blatt 10

„What is important is to deeply understand things and their relations to each other.
This is where intelligence lies. The fact of being quick or slow isn't really relevant.“
(Laurent Schwartz ; 1915-2002)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

10.1. (2 Punkte) Es sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C})$ mit

$$\forall j \in \mathbb{N}_0 \exists c_j > 0 : \left\| \frac{d^j \varphi}{dx^j} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq c_j$$

und $f \in S(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass $\varphi \cdot f \in S(\mathbb{R})$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie die Leibnitz-Regel für die Ableitung der Produkte.

10.2. (6 Punkte) Seien $a, x \in \mathbb{R}$ fest. Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{i\omega x}}{\omega^2 + ai\omega + 1} d\omega$$

mit Hilfe des Residuensatzes. Unterscheiden Sie die Fälle $x \geq 0$ und $x < 0$. Welche Funktion wird durch $\mathcal{F}_{1,\infty}$ auf

$$g(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + ai\omega + 1}$$

abgebildet.

Votieraufgaben

10.3. Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $f \in S(\mathbb{R})$ gegeben. Die Differentialgleichung

$$-u''(x) + au'(x) + u(x) = f(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$ soll gelöst werden. Bestimmen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation eine Lösung $u \in S(\mathbb{R})$.

Hinweis: Verwenden Sie die Lösung von Aufgabe 10.2.

10.4. Berechnen Sie für $f \in S(\mathbb{R}), k > 0$ eine Lösung y der Faltungsleichung

$$\frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k|x-\tau|} y(\tau) d\tau = f(x).$$

Wie verhält sich die Lösung für $k \rightarrow \infty$?

10.5. Für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und für $f \in S(\mathbb{R}^n)$ schreiben wir

$$D^\alpha(f) := (-i)^{|\alpha|} \frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}.$$

Ist dann $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom der Form $P(y) = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha y^\alpha$ mit $c_\alpha \in \mathbb{C}$, so heißt

$$P(D) : S(\mathbb{R}^n) \rightarrow S(\mathbb{R}^n); \quad P(D)f = \sum_{|\alpha| \leq k} c_\alpha D^\alpha(f)$$

der durch P definierte (partielle) Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Zeigen Sie:

- (a) Für alle $f \in S(\mathbb{R}^n)$ gilt: $\widehat{P(D)f}(\xi) = P(\xi)\hat{f}(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$
(b) Sei nun $P(\xi) \neq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$ und es existiere ein $k \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\hat{k}(\xi) = P(\xi)^{-1}$.
Zeigen Sie für alle $f \in S(\mathbb{R}^n)$ ist

$$g = (2\pi)^{-n/2} k * f \text{ Lösung von } P(D)g = f.$$

Die Funktion $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ heißt Fundamentallösung des Operators $P(D)$.

- (c) Finden Sie eine Fundamentallösung $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ für die Differentialgleichung

$$g'' - g = f.$$