Höhere Analysis (SS 2016) — Blatt 11

„The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex domain.“
(J. S. Hadamard; 1865-1963)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

11.1. (4 Punkte) Beweisen Sie, dass Diracsche δ-Distribution

$$\delta_0\varphi := \varphi(0), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

keine reguläre Distribution ist.

11.2. (4 Punkte) Auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist die D-Konvergenz folgendermaen definiert:

$$\begin{aligned} \varphi_j \overset{D}{\to} \varphi \quad \Leftrightarrow \quad & \exists K \subset \mathbb{R}^n \text{ kompakt, so dass } \forall j \in \mathbb{N}\ \operatorname{supp}(\varphi_j) \subseteq K, \text{ und} \\ & \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^n \ \ \|\nabla^\alpha \varphi_j - \nabla^\alpha \varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \to 0 \text{ für } j \to \infty. \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt $C_0^\infty(\Omega) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Beweisen Sie: Aus $\varphi_j \overset{D}{\to} \varphi$ folgt $d(\varphi_j, \varphi) \to 0$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ für $j \to 0$.

Votieraufgaben

11.3. Gegeben sind folgende Abbildungen $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$:

(a) $T(\varphi) := \sum_{|\alpha| \le k} \nabla^\alpha \varphi(0)$, wobei $k \in \mathbb{N}$,
(b) $T(\varphi) := \sum_{|\alpha| \ge 0} \nabla^\alpha \varphi(0)$, wobei $k \in \mathbb{N}$,
(c) $T(\varphi) := \max_{x \in \mathbb{R}^n} \{\varphi(x)\}$,
(d) $T(\varphi) := Q(\mathrm{id} \cdot \varphi)$, wobei $Q \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
(e) $T(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(x))^2 dx$,
(f) $T(\varphi) := \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| dx$.

Entscheinden Sie, welche Abbildungen temperierte Distributionen sind.

11.4. Es sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ und $u \in S(\mathbb{R}^n)$. Das Produkt von u und T wird definiert durch

$$(uT)(\varphi) := T(u\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

(a) Zeigen Sie, dass uT eine temperierte Distribution ist.
(b) Zeigen Sie die Produktregel: D.h. für $j = 1, \ldots, n$ gilt

$$\partial_j(uT) = (\partial_j u)T + u(\partial_j T).$$

11.5. **(a)** Es sei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Geben Sie eine hinreichende und notwendinge Bedingung an, dass eine Funktion $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existiert mit $\psi' = \varphi$.

(b) Es sei $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ mit $T' = 0$. Zeigen Sie, dass T dann konstant ist.
Hinweis: Wählen Sie sich eine Funktion $\omega \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mir $\int_{\mathbb{R}} w(x)\,dx = 1$ und betrachten Sie Funktionen der Form

$$x \mapsto \varphi(x) - \omega(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)dt,$$

wobei $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.