Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Höhere Analysis (SS 2016) — Blatt 12

„We are usually convinced more by reasosn we have found ourselves than by those whoch have occured to others.“
(Blaise Pascal; 1623-1662)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

12.1. (3 Punkte) Seien $g_n \in L^1(\mathbb{R})$ eine δ-Folge, d.h. $g_n(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} g_n d\mu^{(1)} \to 1$ für $n \to \infty$ und $\forall \delta > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ so dass

$$\int_{\mathbb{R} \setminus]-\delta,\delta[} g_n \mu^{(1)} < \varepsilon, \qquad \forall n \geq N.$$

Wir bezeichnen mit g_n die assoziierte temperierte Distribution $g_n \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass $g_n \to \delta$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

12.2. (5 Punkte)

(a) Rechnen Sie nach: In $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gilt $\Delta \ln |x| = 0$.

(b) Beweisen Sie, dass in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ gilt $\Delta \ln |x| = 2\pi\delta_0$.
Hinweis: Verwenden Sie $\int_{\mathbb{R}^2} \ln |x| \varphi(x) dx = \lim_{R\to 0} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{R>|x|>\varepsilon} \ln |x| \varphi(x) dx$ und wenden Sie die Greensche Formel oder Gauß-Ostrogradski an.

(c) Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Zeigen Sie, dass

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \ln |x-y| f(y) dy$$

die Poissongleichung $\Delta u = f$ erfüllt.

Votieraufgaben

12.3. Zeigen Sie, dass die Folge

$$F_N = \sum_{n=1}^{N} c_n \delta_{x_n}, \qquad (c_n \in \mathbb{C}, x_n \in \mathbb{R}^n, \delta_{x_n}(\varphi) := \varphi(x_n) \text{ für } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$$

für $N \to \infty$ gegen eine temperierte Distribution $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ konvergiert, falls $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ absolut konvergiert.

12.4. **(a)** Zeigen Sie, dass $x \to \ln(|x|) \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

(b) Zeigen Sie, dass der Cauchy'sche Hauptwert,

$$\text{p.v.}\left(\frac{1}{x}\right)(\varphi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

eine temperierte Distribution auf $\mathbb{R}$ definiert. Das Kürzel p.v. steht hierbei für *principle value.*

(c) Zeigen Sie, dass es eine temperierte Distribution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ existiert mit $T' = \text{p.v.}\left(\frac{1}{x}\right)$.

(d) Berechnen Sie $x \cdot \text{p.v.}\left(\frac{1}{x}\right)$.

12.5. **(a)** Zeigen Sie, dass die assozierte temperierte Distribution von

$$\sigma_n(x) := \frac{\sin(nx)}{\pi x}, \quad x \in \mathbb{R},$$

gegen die Deltadistribution in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ konvergiert.
Hinweis: Verwenden Sie $\int_{\mathbb{R}} \sin(x)x^{-1}dx = \pi$ und schreiben Sie für das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} \sigma_n(x)\varphi(x)dx = \int_{|x|\geq 1} \sigma_n(x)\varphi(x)dx + \int_{|x|\leq 1} \sigma_n(x)(\varphi(x)-\varphi(0))dx + \varphi(0)\int_{|x|\leq 1} \sigma_n(x)dx,$$

wobei $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(b) Intepretieren Sie die Funktion $f(t) = t^k$ für $k \in \mathbb{N}$ als temperierte Distribution in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ und berechnen Sie Ihre Fouriertransformierte.
Hinweis: Verwenden Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} t^k \widehat{\varphi(t)}dt = \int_{\mathbb{R}} t^k \widehat{\varphi(t)}dt$$

und benutzen dann den Satz von Fubini.