

Höhere Analysis (SS 2016) — Blatt 13

An astronomer, a physicist, and a mathematician (it is said) were holidaying in Scotland. Glancing from a train window, they observed a black sheep in the middle of a field. "How interesting," observed the astronomer, "all Scottish sheep are black!" To which the physicist responded, "No, no! Some Scottish sheep are black!" The mathematician gazed heavenward in supplication, and then intoned, "In Scotland there exists at least one field, containing at least one sheep, at least one side of which is black."

Votieraufgaben

13.1. Seien $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ und $\text{Id}^\alpha(x) = x^\alpha$ für $x \in \mathbb{R}^n$. Beweisen Sie für die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ die Rechenregeln

- (a) $\mathcal{F}(D^\alpha T) = i^{|\alpha|} \cdot \text{Id}^\alpha \cdot \mathcal{F}(T)$,
- (b) $\mathcal{F}(T * f) = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(T)$.

13.2. Der Träger einer Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist definiert durch

$$\text{supp} T := \mathbb{R}^n \setminus \bigcup \{O \subset \mathbb{R}^n \mid O \text{ offen so dass } \varphi \in C_0^\infty(O) \Rightarrow T(\varphi) = 0\}.$$

(a) Für $u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$\text{supp}(T_u) = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen} : x \in U \wedge f = 0 \text{ f.ü. in } U\}.$$

(b) Es seien $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass

$$\text{supp}(S + T) \subseteq \text{supp} T \cup \text{supp} S.$$

13.3. Sei $\Omega =]0, \infty[$ und wir betrachten

$$T(\varphi) := \sum_{k=1}^{\infty} \varphi^{(k)}(k), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

wobei $\varphi^{(k)}$ die k -te Ableitung von φ bezeichne.

- (a) Zeigen Sie, dass $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
- (b) Beweisen Sie, dass T nicht von endlicher Ordnung ist.

13.4. Zu $a \in \mathbb{R}^n$ sei der Operator

$$V_a : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) : T(\varphi) \rightarrow T(\varphi(\cdot - a)) \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

definiert. Beweisen Sie:

- (a) Für $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $a \in \mathbb{R}^n$ gilt $V_a T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.
- (b) Der Operator $V_a : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ ist stetig.
- (c) Für $u \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ gilt $V_a T_u = T_{u(\cdot+a)}$.

Zusatzaufgaben

13.5. Mit Hilfe der Distributionstheorie soll nun die Wärmeleitungsgleichung

$$(\text{WLG}) \quad \partial_t u(t, x) - \Delta_x u(t, x) = 0, \quad u(0, x) = f(x)$$

auf $[0, \infty[\times \mathbb{R}^n$.

1. Teil: Eine exakte mathematische Begründung ist hier nicht notwendig.

- (a) Wenden Sie die Fouriertransformation auf die x -Variable an und lösen Sie die so erhaltene DGL in der Variablen t .
- (b) Berechnen Sie für $t > 0$ die Fouriertransformierte von

$$k_t(x) := (4\pi t)^{n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right).$$

- (c) Bestimmen Sie die Lösung von (WLG).

2. Teil: Eine exakte mathematische Begründung ist hier zwingend notwendig. Wir wollen nun zeigen, dass

$$K(t, x) := \begin{cases} k_t(x) & , t > 0, x \in \mathbb{R}^n \\ 0 & , t \leq 0, x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

eine Fundamentallösung ist von $(\partial_t - \Delta_x)$ in $\mathbb{R}^n$ ist.

Hinweis: Ab hier wird nicht mehr zwischen der Funktion K und der von ihr induzierten Distribution T_K unterschieden.

- (a) Berechnen Sie für $t > 0$ das Integral $\int_{\mathbb{R}^n} k_t(x) dx$.
- (b) Folgern Sie, dass $K \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{n+1})$.
- (c) Zeigen Sie für $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dass

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} k_t(x) \varphi(x) dx = \varphi(0).$$

- (d) Zeigen Sie $(\partial_t - \Delta_x)K = \delta_{(0,0)}$.