Höhere Analysis (SS 2016) — Blatt 2

The difference between the poet and the mathematician is that the poet tries to get his head into the heavens while the mathematician tries to get the heavens into his head.
G.K. Chesterton ; (1874-1936)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

2.1. (8 Punkte) Für eine (nicht notwendigerweise monotone) Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen, $A_n \subseteq \Omega$, definieren wir die Mengen

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m,$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Wir nehmen an, es gebe eine σ-Algebra $\Sigma \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ mit $A_n \in \Sigma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie folgende Aussagen:

(a) Es gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n \in \Sigma$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \in \Sigma$.

(b) Ist die Folge A_n monton wachsend ($A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \dots$), so gilt

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

(Was erwartet man, wenn A_n monoton fallend ist, d.h.: $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \dots$?)

(c) Für ein auf Σ definiertes Maß μ gilt

$$\mu(\liminf_{n\to\infty} A_n) \leq \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n),$$

wobei für die dritte Ungleichung $\mu(\Omega) < \infty$ vorausgesetzt wird.

(d) (Lemma von Borel-Cantelli): Ist (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, so gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) < \infty \Rightarrow \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0.$$

Votieraufgaben

2.2. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} x & \text{falls } x \text{ rational,} \\ 1-x & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f Borel-messbar ist. Ist f stetig?

2.3. Sei $A_i \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ für alle $i \in \mathbb{N}$, so dass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R}$ und $A_i \cap A_k = \emptyset$ für $i \neq j$ gelte. Zeigen Sie, dass

$$\Sigma := \left\{ \bigcup_{i\in I} A_i \mid I \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \right\}$$

eine σ-Algebra ist.

2.4. Sei $\Omega =]0,1[$ und $\mathcal{A} := \{]0, \frac{1}{n}[\mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$.

(a) Gehört $[\frac{1}{150}, \frac{1}{7}[$ zu $\sigma(\mathcal{A})$?

(b) Bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{A})$. *Hinweis*: Verwenden Sie Aufgabe 2.3.

(c) Entscheiden Sie, ob die Funktion $f : (\Omega, \sigma(\mathcal{A})) :\mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit $f(x) := \frac{1}{x}$ messbar ist.

2.5. **(a)** Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass dann f' Borel-messbar.

(b) Zeigen Sie, dass jede monotone Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borel-messbar ist.

Zusatzaufgaben

2.6. Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu^{(1)})$.

(a) Sei $]a, b[\subset \mathbb{R}$ für $-\infty < a < b < \infty$, so dass $\Omega \subset]a, b[$ mit $\mu^{(1)}(\Omega) = b - a$. Beweisen Sie, dass Ω dicht liegt in $]a, b[$.

(b) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und $\mu^{(1)}(\Omega) = 0$. Beweisen Sie, dass Ω nirgends dicht ist, d.h. jedes offene Intervall ein zu Ω disjunktes Teinlintervall enthält.