Höhere Analysis (SS 2016) — Blatt 4

Besides language and music, mathematics is one of the primary manifestations of the free creative power of the human mind."
Hermann Weyl ; (1885-1955)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

4.1. (4 Punkte) Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \times [a, b] \to \mathbb{C}$, wobei $x \mapsto f(x, t)$ für jedes $t \in [a, b]$ messbar sei. Zeigen Sie:

(a) Falls $t \mapsto f(x, t)$ für jedes $x \in \Omega$ stetig ist auf $[a, b]$ und falls ein $g \in \mathcal{L}(\Omega, \Sigma, \mu)$ existiert mit $|f(x, t)| \leq g(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $t \in [a, b]$, dann ist

$$t \mapsto \int_\Omega f(x, t) d\mu$$

auf $[a, b]$ stetig.

(b) Falls $x \mapsto f(x, t)$ integrierbar ist für jedes $t \in [a, b], \partial_t f(x, t)$ existiert und ein $g \in \mathcal{L}(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit $|\partial_t f(x, t)| \leq g(x)$ für alle $x \in \Omega$ und $t \in [a, b]$, dann ist

$$t \mapsto \int_\Omega f(x, t) d\mu$$

differenzierbar auf (a, b) und es gilt

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega f(x, t) d\mu = \int_\Omega \partial_t f(x, t) d\mu.$$

Votieraufgaben

4.2. Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $M \in \Sigma$, $\Sigma' := \Sigma \cap M := \{A \cap M \mid A \in \Sigma\}$ und $\mu' := \mu\big|_{\Sigma'}$. Dann ist ebenfalls (Ω', Σ', μ') ein Maßraum (muss nicht gezeigt werden). Beweisen Sie:

(a) Ist $f : (\Omega, \Sigma, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar, dann ist $f\big|_M : (M, \Sigma', \mu') \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar und es gilt

$$\int_M f\big|_M d\mu' = \int_\Omega \chi_M \cdot f d\mu.$$

(b) Ist $f : (M, \Sigma', \mu') \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar, dann ist $\tilde{f} : (\Omega, \Sigma, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ mit

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in M, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ebenfalls Borel-messbar und es gilt

$$\int_\Omega \tilde{f} d\mu = \int_M f d\mu'.$$

4.3. **(a)** Bestimmen Sie für die Funktionenfolge

$$f_n : (0,4) \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & \text{für } x \geq \frac{1}{\sqrt{n}}, \\ \sqrt{n} & \text{für } x < \frac{1}{\sqrt{n}}, \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $f : (0,4) \to \mathbb{R}$, so dass $f_n \to f$ fast überall und zeigen Sie, dass f Lebesgue-integrierbar ist und dass $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^4 f_n d\lambda^{(1)} \neq \int_0^4 f d\lambda^{(1)}$.

(b) Bestimmen Sie für die Funktionenfolge

$$g_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g_n(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}(\sin(xy^3))^n$$

für $n \in \mathbb{N}$ eine Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass $g_n \to g$ punktweise fast überall und zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^2} g_n d\lambda^{(2)} = \int_{\mathbb{R}^2} g d\lambda^{(2)}$

4.4. Berechnen Sie den folgenden Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^n \mathrm{e}^{\frac{k}{2}},$$

Hinweis: Verwenden Sie

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \int_{\mathbb{N}_0} f(n) d\mu,$$

wobei μ hier das Zählmaß ist.

4.5. Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f_n, g_n, h_n \in \mathcal{L}(\Omega, \Sigma, \mu)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gelten folgende zusätzliche Eigenschaften:

1) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und fast alle $x \in \Omega$ gilt

$$g_n(x) \leq f_n(x) \leq h_n(x).$$

2) Für fast alle $x \in \Omega$ konvergieren die Folgen

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x), \quad \lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$$

punktweise.

3) Seien $g, h \in \mathcal{L}(\Omega, \Sigma, \mu)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n d\mu = \int_\Omega h d\mu, \quad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n d\mu = \int_\Omega g d\mu.$$

Zeigen Sie, dass dann $f \in \mathcal{L}(\Omega, \Sigma, \mu)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

Folgern Sie zusätzlich den Satz der Majorisierten Konvergenz.