Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart

Höhere Analysis (SS 2016) — Blatt 5

Beauty is the first test: there is no permanent place in the world for ugly mathematics.
(Godfrey Harold Hardy , 1877-1947)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

5.1. (2 Punkte) Berechnen Sie das Volumen von

$$K := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 0 \le z \le 3,\ -1 \le x \le 1,\ (3-z)(x^2-1) \le y \le (3-z)(1-x^2)\}.$$

5.2. (2 Punkte) Es sei $A \subset \mathbb{R}^2$ offen, konvex und beschränkt, sowie K der (verallgemeinerte) Kegel mit Höhe $h > 0$ und Grundfläche A. Beweisen Sie, dass $\mu^{(3)}(K) = \frac{1}{3} h \mu^{(2)}(A)$.

Votieraufgaben

5.3. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_Q \sin(x^2+y^2) d\lambda^{(2)}(x,y)$, wobei $Q := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$,

(b) $\int_Q \frac{y}{\sqrt{4-x^2y^2}} d\lambda^{(2)}(x,y)$, wobei $Q := [0,1] \times [0,1]$.

(c) $\int_Q \sqrt{x^2+y^2+z^2} d\lambda^{(3)}(x,y,z)$, wobei $Q := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2+y^2 \le z^2,\ 0 \le z \le 2\}$.

5.4. **(a)** Berechnen Sie mit Hilfe von Polarkoordinaten

$$\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} d\lambda^{(2)}(x,y).$$

(b) Bestimmen Sie mit dem Satz von Fubini

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} dx.$$

(c) Es sei $f : [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}$. Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x,y) dy \right) dx, \quad \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x,y) dx \right) dy$$

und folgern Sie, dass f Lebesgue-integrierbar ist.

5.5. Es sei $f : U \to V$ ein Diffeomorphismus zwischen offenen Teilmengen $U, V \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

i) Für alle messbaren Teilmengen $A \subseteq U$ gilt $\mu^{(n)}(A) = \mu^{(n)}(f(A))$.

ii) Für den Betrag der Funktionaldeterminante gilt $|Jf(x)| = 1$ für alle $x \in U$.

Zusatzaufgaben

5.6. Wir beweisen in dieser Aufgabe, dass für alle $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|u(x)|^2}{|x|^2} dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

In der Literatur spricht man davon, dass die Funktion $f(x) := |x|^{-1}$ ein Hardy-Gewicht ist, da sie obige Ungleichung erfüllt. Die Funktion $f(x) := |x|^{-1}$ ist in der Physik auch als Coulomb-Potential bekannt. Für den Beweis gehen Sie dafür wie folgt vor:

i) Schreiben Sie das linke Integral in Kugelkoordinaten.

ii) Beweisen Sie mittels partieller Integration

$$\int_0^\infty |u(r,\varphi,\theta))|^2 \leq 4 \int_0^\infty |\partial_r u(r,\varphi,\theta)|^2 r^2 dr,$$

wobei r die Integration in radialer Richtung ist und φ, θ die Winkelkoordinaten bezeichnen.

iii) Verwenden Sie die Ungleichung in ii) und wechseln Sie in das ursprüngliche Koordinatensystem. Schätzen Sie die Richtungsableitung geeignet mit dem Gradienten ab.