Priv.-Doz. Dr. Peter H. Lesky
Dipl.-Math. Bartosch Ruszkowski
FB Mathematik, Universität Stuttgart **Tag: 16. Mai - 29. Mai 2016**

Höhere Analysis (SS 2016) — Blatt 6

The worst form of inequality is to try to make unequal things equal.
(Aristotle; 384-322 BC)

Aufgaben zur schriftlichen Abgabe in der Übung

6.1. (4 Punkte) Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und seien $p_1, p_2, p_3, r \in [1, \infty]$ gegeben mit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3}$, zeigen Sie, dass dann gilt $fgh \in L^r(\Omega, \Sigma, \mu)$ und

$$||fgh||_r \leq ||f||_{p_1} ||g||_{p_2} ||h||_{p_3}$$

für $f \in L^{p_1}(\Omega, \Sigma, \mu)$, $g \in L^{p_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$ und $h \in L^{p_3}(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Votieraufgaben

6.2. **(a)** Beweisen Sie, dass für $p \neq q$ beide Inklusionen

$$L^p(\mathbb{R}) \subset L^q(\mathbb{R}), \quad L^q(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$$

falsch sind.

(b) Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum mit $\mu(\Omega) < \infty$. Es sei $1 \leq p < q \leq \infty$ und $f \in L^q(\Omega, \Sigma, \mu)$. Zeigen Sie, dass $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ist und

$$\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q.$$

6.3. Für $1 \leq p \leq \infty$ betrachten wir $K_1(0) := \{u \in L^p(\mathbb{R}) : ||f||_p \leq 1)\}$. Zeigen Sie, dass $K_1(0)$ in $L^p(\mathbb{R})$ abgeschlossen und beschränkt ist, aber nicht kompakt.

6.4. Es sei $1 \leq p < r < q \leq \infty$ und (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Zeigen Sie, dass $L^p(\Omega, \Sigma, \mu) \cap L^q(\Omega, \Sigma, \mu)\} \subseteq L^r(\Omega, \Sigma, \mu)$.
Hinweis: Beweisen Sie eine Ungleichung der Form $||f||_r \leq ||f||_p^{\alpha} ||f||_q^{\beta}$ für geeignete $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$.

Zusatzaufgaben

6.5. Wir beweisen das Prinzip von Cavalieri. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar. Zeigen Sie

$$\int_\Omega f d\mu = \int_0^\infty \mu(\{x \in \Omega | f(x) > t\}) dt.$$

Hinweis: Zeigen Sie diese Gleichheit zuerst für Treppenfunktionen.

© lesky@mathematik.uni-stuttgart.de bartosch.ruszkowski@mathematik.uni-stuttgart.de