Höhere Analysis (SS 2016) — Blatt 7

Mathematics knows no races or geographic boundaries;
for mathematics, the cultural world is one country.
(David Hilbert ; 1862-1943)

Votieraufgaben

7.1. Sei $(L, \langle\,\cdot,\,\cdot\rangle)$ ein Prähilbertraum[1] und $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ein Orthonormalsystem in L. Beweisen Sie: Für jedes $x \in L$ und jedes $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\tilde{x} := \sum_{j=1}^{k} \langle\, x,\, e_j\rangle e_j$$

das Element aus

$$\mathrm{LH}(e_1, \ldots, e_k) := \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j \;:\; \alpha_j \in \mathbb{C} \right\},$$

welches das zu x den kleinsten Abstand $\|\tilde{x} - x\|$ bezüglich der induzierten Norm hat.

7.2. Es sei $L := C([-\pi, \pi] \to \mathbb{C})$ mit dem üblichen Skalarprodukt und für $j \in \mathbb{N}$

$$e_j(x) := \sqrt{\frac{1}{\pi}}\sin(jx),$$
$$f_j(x) := \sqrt{\frac{1}{\pi}}\cos(jx),$$
$$f_0(x) := \sqrt{\frac{1}{2\pi}}.$$

(a) Weisen Sie nach, dass $(g_j)_{j\in\mathbb{N}}$ mit

$$g_j := \begin{cases} e_{\frac{j}{2}} & \text{falls } j \text{ gerade,} \\ f_{\frac{j-1}{2}} & \text{für } j \text{ ungerade} \end{cases}$$

ein Orthonormalsystem in L ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Orthonormalsystem $(e_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $(L, \langle\,\cdot,\,\cdot\rangle)$ nicht vollständig ist.

7.3. **(a)** Weisen Sie nach, dass $l_2 := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty\}$ mit

$$\langle\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle_{l^2} := \sum_{n=1}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

ein Hilbertraum ist.

[1] Ein Prähilbertraum ist ein linearer Raum, versehen mit einem Skalarprodukt.

(b) Es sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum mit einem vollständigen Orthonormalsystem $\{e_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : H \to l_2,\ x \mapsto \{\langle x,\, e_j\rangle\}_{j\in\mathbb{N}}$$

ein Hilbertraum-Isomorphismus von H auf l_2 ist, d.h. ϕ ist eine bijektiv lineare Abbildung mit

$$\langle \phi(x),\, \phi(y)\rangle_{l^2} = \langle x,\, y\rangle$$

für alle $x, y \in H$.

7.4. Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen zu belegen:

(a) $C([-1,1])$ ist bezüglich der L^2-Norm vollständig.

(b) $C([-1,1])$ ist bezüglich der Maximumsnorm vollständig.

(c) $C^1([-1,1])$ ist bezüglich der Maximumsnorm $\|f\|_\infty := \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)|$ vollständig.